

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1

THESE

**Présentée à la faculté des sciences
Département de mathématiques**

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en sciences

Option : Mathématiques Appliquées

Par

BOUFENOUCHE RAZIKA

Thème

**Comportement Singulier des Solutions de Quelques
Problèmes aux Limites Gouvernées par le Bilaplacien
dans un Polygone Plan**

Soutenue le : 22 / 10 / 2015, devant le jury composé de :

Mr. A. KADEM	Prof. Université Ferhat Abbas Sétif1	Président
Mr. B. MEROUANI	Prof. Université Ferhat Abbas Sétif1	Rapporteur
Mr. N. KECHKAR	Prof. Université Mentouri de Constantine1	Examineur
Mr. M. DENCHE	Prof. Université Mentouri de Constantine1	Examineur

2014-2015

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à monsieur **B. MEROUANI**, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif1 qui ma proposé et dirigé ce travail, pour son aide continue, ses précieux conseils fructueux, ses encouragements, sa disponibilités, sa patience qui ont contribués à l'élaboration de ce travail.

Je remercie Monsieur **A. KADEM**, professeur à l'université Ferhat Abbas Sétif1, qui a accepté d'être le président de mon jury, je lui exprime mon respect et toute ma reconnaissance.

Mes vifs remerciements vont également à : Monsieur **N. KECHKAR**, professeur à l'université Mentouri de Constantine d'avoir acceptés de juger ce travail et d'en être l'examineur.

Monsieur **M. DENCHE**, professeur à l'université Mentouri de Constantine d'avoir acceptés de juger ce travail et d'en être l'examineur.

Enfin, mes remerciements vont également à la direction du département de mathématique de l'université de Ferhat Abbas de Sétif et à toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction Générale	3
Notations	7
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	9
1.1 Notations	9
1.2 Espaces de Sobolev	12
1.2.1 Les espaces de Sobolev	12
1.2.2 Domaines polygonaux	13
1.3 Les espaces de traces	13
1.3.1 Traces des fonctions continues dans des domaines réguliers	13
1.3.2 Traces dans les domaines polygonaux	14
1.3.3 Formule de Green	17
2 Calcul des solutions singulières pour différents problèmes	18
2.1 Formulation mathématique des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	18
2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	20
2.1.2 Formulation des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	20
2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires	23
2.3 Equations transcendantes gouvernant le comportement singulier $(E^{(k)})$, $k = 1$ à 6)	25
2.4 Régularité maximale	27
2.5 Solutions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	28
2.6 Developpement singulier de la solution variationnelle du problème (P_k) , $k = 1$ à 6	35

2.7	Tableau des résultats de régularités des fonctions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6	39
3	Comportement singulier des solutions du problème de Dirichlet pour le système de Lamé	47
3.1	Notations	47
3.2	Calcul des solutions singulières	48
3.2.1	Formulation du problème (P)	48
3.2.2	Séparation des variables en coordonnées polaires	48
3.2.3	Equation transcendante gouvernant le comportement singulier (E)	51
3.2.4	Régularité maximale	52
3.2.5	Solutions singulières du problème (P)	53
3.2.6	Développement singulier de la solution variationnelle du problème (P)	57
3.3	Calcul des coefficients c_β , d_β dans le cas de la fissure	57
3.3.1	Calcul des coefficients c_β , d_β	66
3.4	Étude complète du cas de la fissure	68
3.4.1	Étude de la première partie	68
3.4.2	Étude de la deuxième partie	73
	Conclusion	79
	Bibliographie	80

Introduction Générale

Dans ce travail nous allons étudier deux types de problèmes, l'un concerne la mécanique des solides en théorie des plaques minces, alors que l'autre concerne la mécanique des milieux continus.

Le premier groupe de problèmes, se compose de six problèmes aux limites gouvernés par le bilaplacien dans le secteur Ω_ω plan, d'ouverture ω , de rayon ρ et de frontière $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_\omega \cup \bar{\Gamma}_\rho$ (voir Fig. 2).

Ces problèmes sont

$$(P_k) \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega_\omega, \\ B_0^k u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ B_\omega^k u = 0 \text{ sur } \Gamma_\omega. \end{cases}, \quad (k = 1 \text{ à } 6).$$

Où les opérateurs frontières sont :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} B_0^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0^2 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^2 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \\ & \left\{ \begin{array}{l} B_0^3 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^3 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0^4 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^4 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \\ & \left\{ \begin{array}{l} B_0^5 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^5 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0^6 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^6 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_\omega \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

La première équation de (P_k) , $k = 1$ à 6 décrit l'équation d'équilibre de la plaque considérée, déformée par des forces extérieures.

Où :

$$\begin{aligned} M(u) &= \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ N(u) &= -\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial s^2}\right) \end{aligned}$$

et ν est le coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion, $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion, u étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de forces volumique.

Le comportement singulier des solutions variationnelles (y compris le cas de la fissure), constitue l'objet de la première partie de cette thèse.

Dans la deuxième partie on mettra en évidence les coefficients de singularités du problème de Dirichlet gouverné par le système de Lamé dans un secteur plan.

Cette thèse se subdivise en trois chapitres. Elle est structurée de la manière suivante :

Le premier chapitre, est consacré essentiellement aux rappels des résultats principaux sur les espaces de Sobolev classiques, nous en rappelons la définition et quelques propriétés pour mieux comprendre le continu de ce travail. A la fin de ce chapitre, on rappelle quelques résultats théoriques généraux que nous utiliserons.

Au deuxième chapitre, nous étudierons en détaille, comme dans [3], [19], le comportement singulier de la solution des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6 . La section 2.1, de ce chapitre, est consacrée aux notations principales à la formulation mathématique des problèmes. Dans la section 2.3, on démontre que le comportement singulier de la solution des différents problèmes est gouverné par une série des équations transcendantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin^2(\alpha - 1)\omega - (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega = 0 & \text{pour } k=1 \\ \sin(\alpha - 1)2\omega - (\alpha - 1)\sin 2\omega = 0 & \text{pour } k=2 \\ \sin^2(\alpha - 1)\omega + \frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega - \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} = 0 & \text{pour } k=3 \\ \sin^2(\alpha - 1)\omega - \sin^2 \omega = 0 & \text{pour } k=4 \\ \sin(\alpha - 1)2\omega - \frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha - 1)\sin 2\omega = 0 & \text{pour } k=5 \\ \sin^2(\alpha - 1)\omega - \left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right)^2(\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega = 0 & \text{pour } k=6 \end{array} \right.$$

Il est intéressant de remarquer qu'on a obtenu ici la même suite d'équations transcendentes que celle obtenue dans le contexte des plaques et le système de Lamé par plusieurs auteurs voir (cf. [3], [15, *i*]), [20] et autres).

Nous calculons, pour chaque cas, la première solution singulière dans le but de compléter le tableau de P. Grisvard [15, *i*]).

Ainsi, on démontre une condition nécessaire sur s de \mathbb{R} , à savoir $s - 1 < \operatorname{Re} \alpha$, pour que u_α appartient à $H^s(\Omega)$, avec $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$.

Par ailleurs, en mettre en évidence dans le cas de la fissure et l'angle plat, les fonctions singulières ainsi que le développement singulier de la solution faible. Les résultats essentiels sont regroupés dans un tableau très utile destiné aux utilisateurs.

Dans le troisième chapitre, et dans le cadre de la mécanique des milieux continus qui exprime la loi de comportement c'est-à-dire la relation entre les champs des contraintes appliquées et des déformations sous forme tensorielle, nous étudierons le comportement singulier de la solution du problème de Dirichlet pour le système de Lamé (élasticité) dans un polygone plan borné. Nous nous intéressons donc aux singularités de la solution faible $u \in [H^2(\Omega)]^2$ du problème :

$$(P) \begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

où L est l'opérateur différentiel défini par :

$$L = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div})$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé ($\lambda \geq 0$, $\mu > 0$), ν est un nombre réel appelé le coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$). u_j , f_j ($j = 1, 2$), σ désignent respectivement les composantes du vecteur déplacement, de la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes linéarisées.

On montre, comme dans (cf. Merouani [19]) que le comportement singulier de la solution est gouverné par l'équation transcendante :

$$\sin^2 \alpha \omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Cette équation est analogue à celle trouvée dans le contexte des plaques.

Dans cette partie, constituant l'originalité de notre travail, nous intéressons au calcul des coefficients de singularités par des techniques généralisant, à un système, celles utilisées pour le bilaplacien dans [6] et [26].

On finira cette thèse par une conclusion.

Notations

Notations géométriques

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.
 $\partial\Omega = \Gamma$ la frontière de Ω ; ds : la mesure de longueur sur Γ .
 Γ_i une partie (segment) de Γ ; $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Gamma}_i$.
 ω_j l'ouverture de l'angle que font Γ_j et Γ_{j+1} vers l'intérieur de Ω .
 S_i les sommets de Γ .
 f la densité des forces volumiques données.
 η le vecteur unitaire normal sortant.
 $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ la dérivée normale.
 ν le coefficient de **Poisson** des plaques.
 ∇f le gradient de f .
 $\operatorname{div} f$ la divergence de f .
 Δ le Laplacien.
 Δ^2 le bilaplacien.
 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$.

Espaces fonctionnels

- $D(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω .
 $D'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .
 C^k l'espace des fonctions k fois continument différentiables.
 $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de puissances p -ième intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue.
 $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions (classes) essentiellement bornées.
 $W_p^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s ($W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega)$).
 $H^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre s , $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
 $H_0^s(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.
 $H_0^s(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$\tilde{H}^s(\Omega)$ un sous-espace de $H^s(\Omega)$ formé des u fonctions dont le prolongement \tilde{u} par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(\Gamma)$ tel que :

$$\iint_{\Gamma} |u(x) - u(y)|^2 \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^2} < +\infty.$$

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

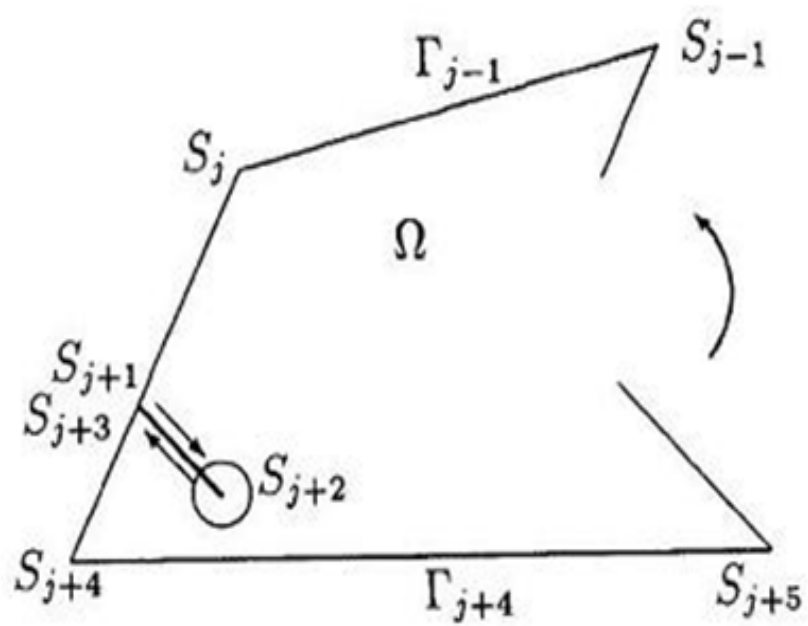
Dans ce chapitre nous précisons quelques notations et rappels d'analyse fonctionnels qui seront d'une grande importance dans notre travail. Pour les espaces de Sobolev, nous rappelons la définition et quelques propriétés, les théorèmes de traces dans les domaines polygonaux.

1.1 Notations

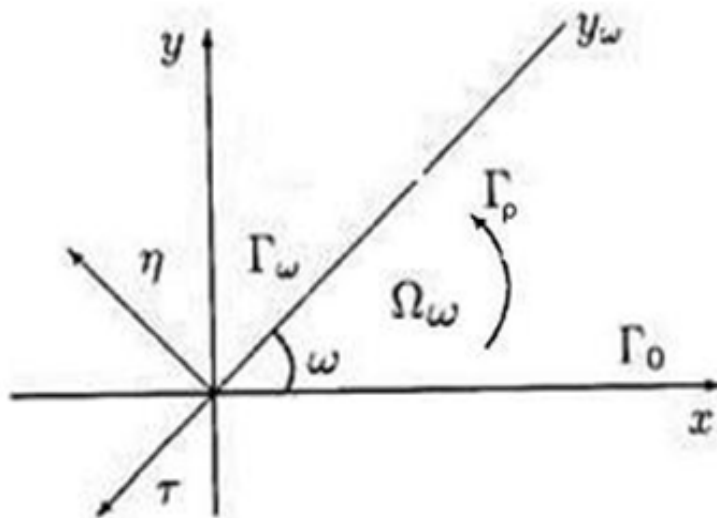
Ω désigne un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine, borné de \mathbb{R}^2 , à frontières polygonale rectiligne $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$. Les Γ_j sont des segments de droites ouverts.

Le côté $]S_{j-1}, S_j[$ est noté Γ_{j-1} et éventuellement, Ω contient des fissures (voir Fig. 1).

L'ouvert défini ainsi est un domaine polygonale. Par suite, tous les résultats sur ce type de domaine sont valables. Il est commode, en coordonnées polaires, de travailler à l'origine. Donc, par une translation suivie d'une rotation, on peut ramener S_j , Γ_j et Γ_{j-1} respectivement à O , O_x et O_{y_ω} où ω est l'angle que font O_x et O_{y_ω} vers l'intérieur de Ω . Il suffit, dans toute la suite de faire l'étude dans le secteur Ω_ω plan, d'ouverture ω , de rayon ρ et de frontière $\bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_\omega \cup \bar{\Gamma}_\rho$ (voir Fig. 2). Sur l'arc Γ_ρ , délimitant le secteur Ω_ω , on n'aura pas besoin de conditions aux limites, étant donné qu'on s'intéresse à un voisinage V du sommet O où les solutions sont à support compact.



(Fig. 1)



(Fig. 2)

$\eta_j = \begin{pmatrix} \eta_1^j \\ \eta_2^j \end{pmatrix}$, $\tau_j = \begin{pmatrix} \tau_1^j \\ \tau_2^j \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire dans le sens positif sur la frontière Γ de Ω .

$M_i(u)$ et $N_i(u)$ désignent les opérateurs différentiels frontières suivant :

$$M(u)|_{\Gamma_i} = M_i(u) = \gamma_i(\nu\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i^2}),$$

et

$$N(u)|_{\Gamma_i} = N_i(u) = -\gamma_i\left(\frac{\partial}{\partial \eta_i}\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial^3 u}{\partial \eta_i \partial \tau_i^2}\right),$$

où γ_i désigne l'application trace sur Γ_i et $\nu \in]0, \frac{1}{2}[$ est le coefficient de **Poisson** du matériau constituant la plaque.

La dérivées normale et la dérivée tangentielle, en fonction de x_1, x_2 sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} = \eta_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tau_i} = -\eta_1^i \frac{\partial}{\partial x_2} + \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x_1}$$

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Les espaces de Sobolev

Les espace de Sobolev peuvent être définis de différentes manières lorsque l'ouvert considéré est à frontière régulière. Les définitions correspondantes peuvent conduire à des espaces différents lorsque la frontière de Ω est peu régulière. Pour cela nous avons préciser les définitions qu'on aura besoin d'utiliser dans notre travail.

Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ .

Définition 1.2.1 Soit m un entier positif. On désigne par $H^m(\Omega)$ le sous espaces des fonctions de $L^2(\Omega)$ telles que : $D^\alpha(u) \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$. $H^m(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour s un nombre réel positif non entier on a $s = [s] + \sigma$, $0 < \sigma < 1$ où $[s]$ désigne la partie entière de s , $H^s(\Omega)$ est un sous espace de $H^{[s]}(\Omega)$ pour les éléments vérifiant :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy < +\infty$$

avec $|\alpha| = [s]$.

muni de la norme

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|^2}{|x - y|^{2+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On distingue deux cas :

Pour $s \succ 0$: $H_0^s(\Omega)$ désigne la fermeture dans $H^s(\Omega)$ de l'espace $D(\Omega)$.

Pour $s < 0$: $H^s(\Omega)$ est le dual de $H^{-s}(\Omega)$.

1.2.2 Domaines polygonaux

On dira qu'un ouvert plan borné Ω est un domaine polygonal si sa frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segments de droite.

Dans le cas particulier, où il n'y a pas de coupure (les $\omega_j < 2\pi$), on dira que Ω est un domaine strictement polygonal, c'est donc un ouvert à frontière lipschitzienne au sens de Necăs [23].

1.3 Les espaces de traces

1.3.1 Traces des fonctions continues dans des domaines réguliers

Rappelons d'abord les théorèmes de trace dans le cadre des fonctions continûment différentiables de $C^s(\overline{\Omega})$ dans des domaines réguliers :

Pour $s \succ 0$ entier, la restriction $u|_{\Gamma}$ de u sur la frontière Γ , notée simplement u ou encore $\gamma_0 u$, d'une fonction de $C^s(\overline{\Omega})$ est bien définie comme fonction de $C^s(\Gamma)$ et appelée la trace de u sur Γ .

Si on désigne par $\eta(x)$, pour tout $x \in \Gamma$, le vecteur unitaire normal en x à Γ et orienté vers l'extérieur de Ω , et par ∇u le gradient de u défini par :

$$\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u).$$

Etant donné une fonction u de $C^k(\overline{\Omega})$, pour un entier $k \geq 1$, son gradient a une trace sur Γ et la fonction $\nabla u \cdot \eta$, notée $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ou encore $\gamma_1 u$, est bien définie comme fonction de $C^{k-1}(\Gamma)$ et appelée la trace de la dérivée normale sur Γ qu'on peut l'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \nabla u(x - t\eta(x)) \cdot \eta(x).$$

1.3.2 Traces dans les domaines polygonaux

Gagliardo [8] à donné une caractérisation de l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ des restrictions à Γ des fonctions de $W_p^1(\Omega)$, soit ds la mesure de longueur sur Γ .

Définition 1.3.1 On désigne par $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L_p(\Gamma)$ telles que :

$$\int_{\Gamma \times \Gamma} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds(x) ds(y)}{\|x - y\|^p} dx dy < +\infty$$

Théorème 1.3.2 L'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ qui est bien définie sur $D(\overline{\Omega})$ admet un prolongement γ_0 par densité, qui est un opérateur linéaire surjectif de $W_p^1(\Omega)$ ($H^1(\Omega)$) sur $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Son noyau est $W_p^{0,1}(\Omega)$.

Il est instructif de décomposer l'espace $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ en morceaux correspondant à chacun des cotés Γ_j . On pose pour cela $f_j = f|_{\Gamma_j}$ la restriction de f à Γ_j , d'après la définition 1.3.1 $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ (Γ_j est un segment de droite donc un ouvert de \mathbb{R} , les fonctions f_j ne sont pas toujours indépendantes entre elle). En effet on a la :

Proposition 1.3.3 La fonction f appartient à $W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ si et seulement si $f_j \in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$ pour tout j et en outre :

i) $f_j(S_j) = f_{j+1}(S_j)$, $1 \leq j \leq N$ si $p > 2$

ii) $\int_0^{\sigma} |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty$, $1 \leq j \leq N$ si $p = 2$

où $x_j(\sigma)$ (resp $x_j(-\sigma)$) désigne le point de Γ_{j+1} (resp Γ_j) à distance σ du sommet S_j .

- La condition i) a un sens puisque d'après le théorème de Sobolev, la fonction f_j est continue sur Γ_j donc en S_j et en S_{j-1} .

Cette condition est naturelle car une fonction f continue sur Γ est après découpage une collection de f_j continues qui se raccordent aux sommets.

- La condition **ii)** exprime que f_j et f_{j+1} coïncident en S_j mais dans un sens faible et on notera :

$$f_j \underset{S_j}{\sim} f_{j+1}.$$

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \left(W_p^{1-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)$ n'est pas l'espace des traces $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ de $H^2(\Omega)$. La discontinuité de la normale aux coins nous empêche de définir les espaces de traces comme dans le cas des ouverts à frontière régulière. On considère donc les traces sur chacun des cotés Γ_j , avec des conditions de compatibilité. Pour expliquer cette difficulté nous allons utiliser l'analogie avec les espaces de fonction continument différentiables. Il est clair que l'application :

$$\gamma_{0j} : u \mapsto u|_{\Gamma_j}, \quad j = \overline{1, N}$$

est définie de $C^0(\overline{\Omega})$ sur $C^0(\Gamma)$. Par ailleurs il est clair que l'application :

$$\gamma_{1j} : u \mapsto \left\{ f_j = \frac{\partial u}{\partial \eta_j} \Big|_{\Gamma_j} \right\}, \quad j = \overline{1, N}$$

est de $C^1(\overline{\Omega})$ sur $\prod_{j=1}^N C^0(\overline{\Gamma_j})$. On définit une fonction f sur Γ par :

$$f_j = f|_{\Gamma_j}.$$

On obtient pas nécessairement un élément de $C^0(\Gamma)$. En d'autres termes, la dérivée normale au bord d'une fonction u de $C^1(\overline{\Omega})$ n'appartient pas à l'espace des restrictions au bord des éléments de $C^0(\overline{\Omega})$. Un phénomène similaire se produit dans les espaces de Sobolev.

La difficulté ci-dessus est à l'origine du choix fait ici de considérer les traces sur chacun des cotés Γ_j et non pas globalement, puis de chercher les conditions de compatibilité entre ces diverses traces. Comme dans la proposition 1.3.3.

Avant de donner un énoncé précis des conditions de compatibilité nous introduisons quelques notations :

Soit L l'opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre d , pour chaque j , on peut développer L sur les puissances de $\frac{\partial}{\partial \eta_j}$:

$$L = \sum_{k=0}^d L_{j,k} \frac{\partial^k}{\partial \eta_j^k}$$

où $L_{j,k}$ est un opérateur différentiel tangentiel à Γ_j c'est-à-dire un polynôme de degré $\leq d - k$ en $\frac{\partial}{\partial \tau_j}$.

Théorème 1.3.4 *L'application : $u \mapsto \{g_{j,k}\}_{\substack{j=1,2,\dots,N \\ k=0,1,\dots,m-1}}$ qui est définie pour u dans $D(\overline{\Omega})$ par :*

$$g_{j,k}(u) = \frac{\partial^k u}{\partial \eta_j^k} \Big|_{\Gamma_j}$$

admet un prolongement par densité qui est un opérateur linéaire continu surjectif de $W_p^m(\Omega)$ sur le sous espace de :

$$\prod_{j=1}^N \prod_{k=0}^{m-1} W_p^{m-k-\frac{1}{p}}(\Gamma_j)$$

défini par les conditions suivantes : Pour tout opérateur différentiel L à coefficients constants d'ordre $d \leq m-1$ on a :

$$i) \sum_{k=0}^d (L_{j,k} g_{j,k})(S_j) = \sum_{k=0}^d (L_{j+1,k} g_{j+1,k})(S_j)$$

pour $d < m - \frac{2}{p}$ et :

$$ii) \sum_{k=0}^d L_{j,k} g_{j,k} \underset{S_j}{\sim} \sum_{k=0}^d L_{j+1,k} g_{j+1,k}$$

pour $d = m-1$ et $p = 2$.

Une démonstration complète est donnée dans Grisvard [16] où on considère également le cas d'un polygone curviligne.

Dans le cas particulier où $m = 2$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.5 *Soit $\gamma_{0j}u = g_j$ et $\gamma_{1j}u = h_j$, alors l'application trace $u \mapsto \{g_j, h_j\}$ est un opérateur linéaire continu surjectif de $H^2(\Omega)$ sur le sous espace de $\prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ défini par les conditions suivantes :*

$$g_j(S_j) = g_{j+1}(S_j) \text{ pour tout } j$$

et

$$\begin{aligned} g'_j &\underset{S_j}{\sim} -\cos \omega_j g'_{j+1} + \sin \omega_j h_{j+1} \\ h_j &\underset{S_j}{\sim} -\sin \omega_j g'_{j+1} - \cos \omega_j h_{j+1} \end{aligned}$$

pour tout j (les signes ' désignant la différentiation tangentielle (en τ^j)).

Définition 1.3.6 *Pour $u \in D(\overline{\Omega})$, nous définissons les opérateurs de traces M, N comme suit :*

$$Mu = \nu \Delta u + (1 - \nu) (\partial_1^2 u \eta_1^2 + 2\partial_{12}^2 u \eta_1 \eta_2 + \partial_2^2 u \eta_2^2).$$

$$Nu = -\frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} + (1 - \nu) (\partial_1^2 u \eta_1 \eta_2 - \partial_{12}^2 u (\eta_1^2 - \eta_2^2) + \partial_2^2 u \eta_1 \eta_2).$$

où ν est un nombre réel appelé coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

1.3.3 Formule de Green

Lemme 1.3.7 Pour deux fonctions $u \in D(\overline{\Omega})$, $v \in H^2(\Omega)$ on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega_\omega} (\Delta^2 u) v dx = a(u, v) - \left(\int_{\Gamma} (Mu) \gamma_1 v d\sigma + \int_{\Gamma} (Nu) \gamma_0 v d\sigma \right)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire définie de $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\omega} (\Delta^2 u) v dx = \int_{\Omega_\omega} \Delta u \Delta v dx - \int_{\Omega_\omega} \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx \\ - \int_{\Gamma} \left[\gamma_0 (Mu) \gamma_0 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \gamma_0 (Nu) \gamma_0 v \right] d\sigma \end{array} \right.$$

Preuve. On utilise la décomposition du bilaplacien suivante :

$$\Delta^2 = \partial_1^2 (1. \partial_1^2) + \partial_{12}^2 (2(1 - \nu) \partial_{12}^2) + \partial_1^2 (\nu \partial_1^2) + \partial_2^2 (\nu \partial_1^2) + \partial_2^2 (1. \partial_2^2),$$

et nous appliquant la formule de Green deux fois. ■

Chapitre 2

Calcul des solutions singulières pour différents problèmes

Dans ce chapitre on donnera une description explicite, comme dans [3] et ([15], *i*) des singularités des solutions faibles de quelques problèmes aux limites gouvernés par le bilaplacien dans un polygone plan borné,. On montre que le comportement singulier des solutions est gouverné par une série d'équations transcendentes, analogues à celle obtenue dans le contexte des plaques et le système de Lamé par plusieurs auteurs voir ([3], [15], *i*), et autres). On mettra en évidence, dans chaque cas (y compris de la fissure et de l'angle plat lorsqu'il s'agit d'un problème mêlé), les fonctions singulières ainsi que le développement singulier de la solution.

L'essentiel de notre travail dans ce chapitre est le prolongement du tableau de P. Grisvard destiné aux utilisateurs. En effet, pour les premières fonctions singulière, on regroupera les résultats essentiels dans un tableau prolongeant celui de P. Grisvard ([15], *i*).

2.1 Formulation mathématique des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6

On considère ici une famille de 6 problèmes gouvernés par le bilaplacien dans un polygone plan borné, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u si possible dans $H^4(\Omega_\omega)$, solution

de :

$$(P_k) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega_\omega, \\ B_0^k u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ B_\omega^k u = 0 & \text{sur } \Gamma_\omega. \end{cases}$$

où les opérateurs frontières sont :

$$\begin{cases} B_0^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^1 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} B_0^2 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^2 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} B_0^3 u = \begin{cases} u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^3 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} B_0^4 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^4 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} B_0^5 u = \begin{cases} u \\ M(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^5 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} B_0^6 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_0 \\ B_\omega^6 u = \begin{cases} M(u) \\ N(u) \end{cases} & \text{sur } \Gamma_\omega \end{cases}, \quad (6)$$

2.1.1 Interprétation physique des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion.

Ces problèmes représentent différents modèles mathématiques d'une plaque, $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions au bord (1) à (6) signifient que la plaque est :

- encastrée au bords Γ_0 et Γ_ω , pour le premier problème,
- encastrée au bord Γ_0 et simplement supportée au bord Γ_ω , pour le second problème,
- encastrée au bord Γ_0 et libre au bord Γ_ω , pour le troisième problème,
- simplement supportée au bords Γ_0 et Γ_ω , pour le quatrième problème,
- simplement supportée au bord Γ_0 et libre au bord Γ_ω , pour le cinquième problème,
- libre au bords Γ_0 et Γ_ω pour le sixième problème.

La méthode variationnelle usuelle, étant valable dans les domaines à frontière polygonale ainsi que dans le cas des fissures (voir [19]), on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^2(\Omega_\omega)$. C'est pourquoi dans ce qui suit nous partirons d'une solution $u \in H^2(\Omega_\omega)$. De plus les théorèmes habituels de régularité permettent d'affirmer d'après S. Agmon [2] que $u \in H^2(\Omega_\omega \cap CV)$ pour tout voisinage fermé V du sommet O de Ω_ω .

2.1.2 Formulation des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6.

1) **Problème (P_2) :**

a) **Formulation du problème (P_2) :**

On considère ici un problème aux limites modèle intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u , si possible dans $H^2(\Omega_\omega)$, solution de

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega_\omega, \quad (1) \\ B_0^2 u = \begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (2) \\ B_\omega^2 u = \begin{cases} u = 0 \\ M(u) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_\omega. \quad (3) \end{array} \right.$$

b) **Interprétation physique du problème (P_2) :**

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions au bord sur Γ_0 (resp sur Γ_ω) signifient que la plaque est encadrée sur Γ_0 (pas de déplacement des points de cette partie du bord) et simplement supportée au bord Γ_ω .

2) Problème (P_3) :

a) Formulation du problème (P_3) :

On considère ici un problème aux limites gouverné par le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u , si possible dans $H^2(\Omega_\omega)$, solution de :

$$(P_3) \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega_\omega, & (1) \\ \begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{cases}, & (2) \\ \begin{cases} N(u) = 0 \\ M(u) = 0 \end{cases}. & (3) \end{cases}$$

b) Interprétation physique du problème (P_3) :

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacement), f est la densité de force volumique et les conditions au bord sur Γ_0 et Γ_ω signifient que la plaque est encadrée au bord Γ_0 et libre au bord Γ_ω , c'est-à-dire aucune force n'est appliquée sur le bord.

3) Problème (P_4) :

a) Formulation du problème (P_4) :

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u , si possible dans $H^2(\Omega_\omega)$, solution de :

$$(P_4) \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega_\omega, & (1) \\ u = M(u) = 0 \text{ sur } \Gamma. & (2) \end{cases}$$

b) Interprétation physique du problème (P_4) :

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle

mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force et les conditions au bord (2) signifient que la plaque est simplement supportée.

4) Problème (P_5) :

a) Formulation du problème (P_5) :

On considère ici un problème aux limites gouverné par le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u , si possible dans $H^2(\Omega_\omega)$, solution de :

$$(P_5) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega_\omega, \quad (1) \\ \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ M(u) = 0 \end{array} \right. \quad (2) \\ \left\{ \begin{array}{l} N(u) = 0 \\ M(u) = 0 \end{array} \right. \quad (3) \end{array} \right.$$

b) Interprétation physique du problème (P_5) :

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force volumique et les conditions au bord sur Γ_0 et Γ_ω signifient que la plaque est simplement supportée au bord Γ_0 et libre au bord Γ_ω .

5) Problème (P_6) :

a) Formulation du problème (P_6) :

On considère ici un problème aux limites intermédiaire pour le bilaplacien, c'est-à-dire pour $f \in L^2(\Omega)$, on cherche u , si possible dans $H^2(\Omega_\omega)$, solution de :

$$(P_6) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega_\omega, \\ \left\{ \begin{array}{l} N(u) = 0 \\ M(u) = 0 \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

b) Interprétation physique du problème (P_6) :

Physiquement, $M(u)$ est le moment de flexion et $N(u)$ est la force transversale composée de la force de cisaillement et du moment de torsion. Ce problème représente un modèle mathématique d'une plaque : $u(x)$ étant le déplacement perpendiculaire à la plaque au

point x (sous l'hypothèse de petits déplacements), f est la densité de force volumique et les conditions aux bord sur Γ_0 et Γ_ω signifient que la plaque est libre au bords Γ_0 et Γ_ω .

Pour étudier le comportement de u près des sommets, nous utilisons les résultats de H. Blum et R. Rannachar [3] et on se concentre sur le calcul des fonctions singulières pour prolonger le tableau de Grisvard [15, i]).

Notations :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , à frontière polygonale composée de trois partie disjointes $\partial\Omega_D, \partial\Omega_N, \partial\Omega_S$.

Sans perte de généralité, nous restreignons notre analyse au voisinage V d'un point critique isolé S_j , qui coïncide avec l'origine des axes de coordonnées, de plus nous supposons que chacun des côtés Γ_j, Γ_{j+1} appartient seulement à l'un des ensembles $\partial\Omega_D, \partial\Omega_N, \partial\Omega_S$. L'angle intérieur ω_j au sommet S_j varie dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ c'est-à-dire le cas $\omega_j = 0$ est exclu, mais le cas de la fissure $\omega_j = 2\pi$ est considéré, les coordonnées polaires sont notées (r_j, θ_j) , l'outil de base pour notre analyse est la méthode de **Kondratiev** [17].

Nous omettrons dorénavant l'indice j et nous posons $\Gamma_j = \Gamma_1, \Gamma_{j+1} = \Gamma_2$.

Soient $f \in L^2(\Omega)$, u la solution faible du problème (P_k) , $k = 1$ à 6.

La forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ est beaucoup mieux adaptée à la géométrie de Ω . De plus la régularité de u est essentiellement déterminée par le $Re\alpha$, pour que $u_\alpha \in H^\sigma(\Omega)$. On admet la condition suffisante. Pour les différents problèmes on mettra en évidence les fonctions singulières, y compris le cas de la fissure et de l'angle plat lorsqu'il s'agit du problème mêlé, les premières fonctions singulières, souvent utilisées en pratique, feront l'objet d'un tableau récapitulatif qui regroupera celui de P. Grisvard ([15], i)).

2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires

L'idée de base est le changement de variable $r = e^t$ (donc $\partial_t = r\partial_r$) transformant le domaine Ω dans la bande $B_\omega = \mathbb{R} \times]0, \omega[$ puis considérer les solutions de la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$ dans l'équation $\Delta^2 u = 0$ dans Ω , et les différentes conditions aux limites.

Il suffit de considérer le problème homogène :

$$\Delta^2 u = 0.$$

En coordonnées polaires le bilaplacien s'écrit :

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}.$$

Cette dernière équation devient :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial \theta^2} = 0.$$

On sépare les variables en coordonnées polaires en posant $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$. On en déduit une équation différentielle ordinaire d'ordre 4, dans $]0, \omega[$, dépendant d'un paramètre complexe $\alpha(\nu)$:

$$r^{\alpha-4} \left[\phi_\alpha^{(4)}(\theta) + (2\alpha^2 - 4\alpha + 4) \phi_\alpha^{(2)}(\theta) + (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2) \phi_\alpha(\theta) \right] = 0. \quad (*)$$

- Pour $\alpha \notin \{0, 1, 2\}$ une solution générale de cette équation est donnée par :

$$\phi_\alpha(\theta) = c_1 \sin \alpha \theta + c_2 \cos \alpha \theta + c_3 \sin(\alpha - 2)\theta + c_4 \cos(\alpha - 2)\theta. \quad (**)$$

- Pour $\alpha \in \{0, 2\}$:

$$\phi(\theta) = c_1 + c_2 \theta + c_3 \sin 2\theta + c_4 \cos 2\theta. \quad (***)$$

- Pour $\alpha = 1$:

$$\phi(\theta) = c_1 \sin \theta + c_2 \theta \sin \theta + c_3 \cos \theta + c_4 \theta \cos \theta. \quad (***)$$

avec c_1, c_2, c_3, c_4 , des constantes.

- Les conditions aux limites homogènes correspondant aux cas (1) à (6) donnent :

$$\begin{cases} \phi_\alpha(0) = \phi'_\alpha(0) = 0, \\ \phi_\alpha(\omega) = \phi'_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} \phi_\alpha(0) = \phi'_\alpha(0) = 0, \\ \phi_\alpha(\omega) = \phi''_\alpha(\omega) + [\nu\alpha^2 + (1 - \nu)\alpha] \phi_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} \phi_\alpha(0) = \phi'_\alpha(0) = 0, \\ \phi''_\alpha(\omega) + (\nu\alpha^2 + (1 - \nu)\alpha) \phi_\alpha(\omega) = \\ \phi'''_\alpha(\omega) + [(2 - \nu)\alpha^2 - 3\alpha(1 - \nu) + 2(1 - \nu)] \phi'_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} \phi_\alpha(0) = \phi'_\alpha(0) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(0) = 0, \\ \phi_\alpha(\omega) = \phi'_\alpha(\omega) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4')$$

$$\begin{cases} \phi_\alpha(0) = \phi'_\alpha(0) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(0) = 0, \\ \phi'_\alpha(\omega) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(\omega) = \\ \phi''_\alpha(\omega) + [(2-\nu)\alpha^2 - 3\alpha(1-\nu) + 2(1-\nu)]\phi'_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (5')$$

$$\begin{cases} \phi'_\alpha(0) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(0) = \\ \phi''_\alpha(0) + \begin{bmatrix} (2-\nu)\alpha^2 - 3\alpha(1-\nu) \\ +2(1-\nu) \end{bmatrix} \phi'_\alpha(0) = 0, \\ \phi'_\alpha(\omega) + (\nu\alpha^2 + (1-\nu)\alpha)\phi_\alpha(\omega) = \phi''_\alpha(\omega) + [(2-\nu)\alpha^2 - 3\alpha(1-\nu) + 2(1-\nu)]\phi'_\alpha(\omega) = 0. \end{cases} \quad (6')$$

2.3 Equations transcendantes gouvernant le comportement singulier ($E^{(k)}$, $k = 1 \text{ à } 6$)

$E^{(k)}$ est l'ensemble des α réelle ou complexe, telles que le problème aux limites homogène admet une solution non identiquement nulle et est définie par la :

Proposition 2.3.1 *Le problème homogène*

$$\left(P'_k \right) \begin{cases} \Delta^2 u = 0, \\ (k'), k = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

2.3. EQUATIONS TRANSCENDANTES GOUVERNANT LE COMPORTEMENT SINGULIER $(E^{(K)}, K = 1 \text{ à } 6)$

détermine u non nulle lorsque $\alpha (\neq 0, 1, 2)$ est solution de l'équation caractéristique correspondante :

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \sin^2(\alpha - 1)\omega = (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega && \text{pour } (P'_1) \\
 (2.2) \quad & \sin(\alpha - 1)2\omega = (\alpha - 1) \sin 2\omega && \text{pour } (P'_2) \\
 (2.3) \quad & \sin^2(\alpha - 1)\omega = -\frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega + \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} && \text{pour } (P'_3) \\
 (2.4) \quad & \sin^2(\alpha - 1)\omega = \sin^2 \omega && \text{pour } (P'_4) \\
 (2.5) \quad & \sin(\alpha - 1)2\omega = \frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha - 1) \sin 2\omega && \text{pour } (P'_5) \\
 (2.6) \quad & \sin(\alpha - 1)\omega = \left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right)^2 (\alpha - 1)^2 \sin 2\omega && \text{pour } (P'_6)
 \end{aligned}$$

Les valeurs exceptionnelles $\alpha = 0, 1, 2$ donnent l'analogue de $(2.k)$, $k = 1$ à 6 :

$$\begin{aligned}
 (2.1)' \quad & \begin{cases} \sin 2\omega (2 - \cos 2\omega - \sin 2\omega + 2\omega) - 4\omega = 0 & \text{pour } \alpha = 0, 2 \\ \sin^2 \omega - \omega^2 = 0 & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \\
 (2.2)' \quad & \begin{cases} 2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega = 0 & \text{pour } \alpha = 0 \\ -3 \sin 2\omega - 4\nu \sin 2\omega \cos 2\omega + 8\omega (1 + \nu) \cos 2\omega = 0 & \text{pour } \alpha = 2 \\ \frac{1}{2} \sin 2\omega - \omega = 0 & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \\
 (2.3)' \quad & \begin{cases} (1 - \nu) \cos 2\omega = -(1 + \nu) & \text{pour } \alpha = 0, 2 \\ 9 \cos 2\omega + 12\omega \sin 2\omega + 20 = 0 & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \\
 (2.4)' \quad & \begin{cases} \sin 2\omega = 0, \omega \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\} & \text{pour } \alpha = 0 \\ 2\omega \sin 2\omega = 0 & \text{pour } \alpha = 2 \\ \sin^2 \omega, \omega \in \{ \pi, 2\pi \} & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \\
 (2.5)' \quad & \begin{cases} \sin 2\omega = 0, \omega \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\} & \text{pour } \alpha = 0, 2 \end{cases} \\
 (2.6)' \quad & \begin{cases} \sin \omega = 0, \omega \in \{ \pi, 2\pi \}, \cos \omega = 0, \omega \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} & \text{pour } \alpha = 2 \\ \sin 2\omega = 0 & \text{pour } \alpha = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Au courant de calcul des solutions singulières, au paragraphe suivant, on déduira les relations $(2.k)$, $k = 1$ à 6 .

Soulignons que la suite d'équations est obtenue par plusieurs auteurs (Grisvard-Merouani, Aibeche-Chikouche).

Par exemple dans Blum et Rannacher 1980, on trouve en détail l'étude des racines des équations transcendantes $(2.k)$, $k = 1$ à 6 .

2.4 Régularité maximale

Soit $\alpha_l^{(k)}$, l entier $\succeq 1$, une énumération des racines des équations (2.k), $k = 1$ à 6 et $\nu_l^{(k)}$ la multiplicité correspondante, $r^\alpha \phi_\alpha(\theta)$ étant calculées explicitement, une condition nécessaire pour qu'elle soient $H^\sigma(\Omega)$ est $\sigma - 1 \preceq \operatorname{Re} \alpha$ (c'est-à-dire régularité maximale).

Elle est suffisante si on applique la méthode de **Kondratiev** [17] ou de **Grisvard** ([15], i)).

Théorème 2.4.1 de ([15], i) et [17]) Soit $u \in W_2^2(\Omega)$ une solution variationnelle de (P_k) , $k = 1$ à 6, avec $f \in W_p^m(\Omega)$, il existe des nombres c_k et d_k tels que :

$$u - \sum_{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} < m+4-\frac{2}{p}} c_k V_{\alpha_l^{(k)}} - \sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} < m+4-\frac{2}{p} \\ \nu_l=2}} d_k U_{\alpha_l^{(k)}} \in W_p^{m+4}(\Omega) \quad (2.7)$$

à condition qu'aucun des $\operatorname{Re} \alpha_l^{(k)}$ ne soit égal à $m + 4 - \frac{2}{p}$.

Remarque 2.4.2 On peut omettre le terme correspondant à $\alpha = 2$ lorsque :

$$-\cos \omega_j g_j'' - \sin \omega_j h_j' \underset{S_j}{\sim} -\cos \omega_j g_{j+1}'' - \sin \omega_j h_{j+1}'$$

et :

$$m \succ \frac{2}{p} - 2.$$

Pour la démonstration du théorème 2.4.1, il suffit d'utiliser la méthode de Kondratiev (dans le cas où $p = 2$).

Il est intéressant de traiter le cas de la fissure ($\omega = 2\pi$) pour cela on a :

Proposition 2.4.3 Soit $\omega = 2\pi$. Alors la solution variationnelle $u \in W_2^2(\Omega)$ du problème (P_k) , $k = 1$ à 6, appartient à $W_p^4(\Omega)$ dès que :

$$\begin{aligned} p < 4 & \text{ pour les cas (1), (4) et (6)} \\ p < \frac{8}{3} & \text{ pour les cas (2), (3) et (5)} \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\omega = 2\pi$. Alors les équations (2.k), $k = 1$ à 6 deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha - 1) 2\pi &= 0 & \text{pour } k = 1, 4, 6 \\ \sin(\alpha - 1) 4\pi &= 0 & \text{pour } k = 2, 5 \\ \sin^2(\alpha - 1) 2\pi &= \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} & \text{pour } k = 3. \end{aligned}$$

Donc pour $k = 1, 4$ et 6 les racines $\alpha_l^{(k)}$ sont explicitement les nombres :

$$\alpha_l^{(k)} = \frac{l}{2}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Evidemment il n'y a aucune racine dans la bande $1 \prec \operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} \prec \frac{3}{2}$, ce qui assure bien la régularité de u dans $W_p^2(\Omega)$ pour $2 - \frac{2}{p} \prec \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $p \prec 4$ et $\omega = 2\pi$. On fait la même chose pour les cas (2), (5). Cependant les racines de l'équation $\sin^2(\alpha - 1)2\pi = \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)}$ (cas (3)) sont explicitement les nombres complexes :

$$\alpha_l^{(3)} = \frac{l}{4} \mp \frac{i}{4\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right), \quad l \text{ impair} \in \mathbb{Z},$$

il est intéressant de remarquer que $\operatorname{Re} \alpha_l^{(k)}$ ne dépend pas du coefficient ν ; de plus il n'y a aucune racine $\operatorname{Re} \alpha_l^{(3)}$, $l \text{ impair} \in \mathbb{Z}$, vérifiant : $1 \prec \operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} \prec \frac{5}{4}$. Ce qui implique bien que $u \in W_p^2(\Omega)$ dès que $2 - \frac{2}{p} \prec \frac{5}{4}$, c'est-à-dire $p \prec \frac{8}{3}$ (et bien sûr $\omega = 2\pi$).

Ajoutons que dans le cas d'un angle plat $\omega = \pi$, on a (pour le cas (3)) :

$$\alpha_l^{(3)} = \frac{l}{2} \mp \frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right), \quad l \text{ impair} \in \mathbb{Z}$$

et la régularité de u coïncide avec les cas (1), (4) et (6) pour $\omega = 2\pi$. ■

2.5 Solutions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6

Il est immédiat de vérifier qu'un tel type de solution appartient à $W_p^2(V)$ si et seulement si $\operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} \succ 1$ tandis qu'il appartient à $W_p^{m+4}(V)$ si et seulement si $\operatorname{Re} \alpha_l^{(k)} \succ m + 4 - \frac{2}{p}$, ceci contredit le théorème de régularité habituel dès qu'il existe un α_l solution de (2.k), $k = 1$ à 6 dans l'intervalle $\left] 0, m + 4 - \frac{2}{p} \right]$. Le rôle de ces fonctions sera précisé dans un énoncé un peu plus loin.

Les solutions singulières des différents problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6, sont regroupées dans la proposition suivantes :

Proposition 2.5.1 (*P. Grisvard [15], i*) Soit $\alpha_l^{(k)}$, $l \succeq 1$ une énumération des racines de l'équation (2.k), $k = 1$ à 6, avec $\alpha_l^{(k)} \neq 0, 1, 2$ pour tout k ; alors les solutions singulières de (P_k) , $k = 1$ à 6, sont données par :

$$V_l^{(k)}(r, \theta) = r^{\alpha_l^{(k)}} \phi_l^{(k)}(\theta) \tag{2.8}$$

et

$$U_l^{(k)}(r, \theta) = \begin{cases} r^{\alpha_l^{(k)}} \left[\text{Logr } \phi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) + \partial_{\alpha_l^{(k)}} \phi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) \right] & \text{si } \omega < 2\pi \\ r^{\alpha_l^{(k)}} \psi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta) & \text{si } \omega = 2\pi \end{cases}, \quad k = 1, \dots, 6$$

où $\alpha_l^{(k)}$, $k = 1$ à 6, est tel que $1 < \text{Re } \alpha_l^{(k)} < m + 4 - \frac{2}{p}$, et $\phi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta)$, $\psi_{\alpha_l^{(k)}}(\theta)$ sont de classe C^∞ sur $]0, \omega[$.

Dans ce qui suit nous allons déterminer les solutions singulières du problème homogène (P'_k) et par suite celles du problème non homogène correspondant et ceci dans les deux cas : Domaine fissuré et domaine non fissuré, et pour ne pas alourdir l'exposé par des calculs, nous allons faire seulement les calculs pour les cas du (problème de Dirichlet et le problème mêlé), les même techniques pour les autres cas :

1) Solutions singulières du problème de Dirichlet :

a) Si $\omega < 2\pi$:

Soit $\alpha_l^{(1)}$, $l \geq 1$ une énumération des racines ($\neq 0, 1, 2$) de l'équation (2.1) dans la bande :

$$1 < \text{Re } \alpha_l^{(1)} < m + 4 - \frac{2}{p}$$

Une solution générale de (*) est donnée par (**). En utilisant (1') en $\theta = 0$, cela implique :

$$c_2 + c_4 = 0, \quad \alpha c_1 + (\alpha - 2) c_3 = 0 \quad (I)$$

et par suite (1') en $\theta = \omega$ et (I) donnent le système suivant d'inconnue c_1 et c_2 :

$$(S_D) \begin{cases} \left[\sin \alpha \omega - \frac{\alpha}{(\alpha-2)} \sin(\alpha-2)\omega \right] c_1 + [\cos \alpha \omega - \cos(\alpha-2)\omega] c_2 = 0 \\ [\alpha \cos \alpha \omega - \alpha \cos(\alpha-2)\omega] c_1 + [-\alpha \sin \alpha \omega + (\alpha-2) \sin(\alpha-2)\omega] c_2 = 0 \end{cases}$$

(S_D) admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déterminant est nul, ceci donne bien l'équation transcendante (2.1). Donc pour tout $\alpha (\neq 0, 1, 2)$ réelle ou complexe solution de (2.1) les solutions du système (S_D) décrivent bien une droite.

Donc le choix de c_1 par exemple détermine bien les autres c_i , $i = 2$ à 4.

Soit :

$$c_1 = \cos \alpha \omega - \cos(\alpha-2)\omega, \quad c_2 = \sin \alpha \omega - \frac{\alpha}{(\alpha-2)} \sin(\alpha-2)\omega$$

et par suite c_3 et c_4 , donc :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\theta) = & \left[\sin \alpha \omega - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha-2)\omega \right] [\cos \alpha \theta - \cos(\alpha-2)\theta] c_2 - \\ & [\cos \alpha \omega - \cos(\alpha-2)\omega] \left[\sin \alpha \theta - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha-2)\theta \right] c_1 \end{aligned}$$

b) Si $\omega = 2\pi$ (cas de la fissure) :

Dans ce cas la solution générale (**) devient d'après l'utilisation de la condition au limite en $\theta = 0$ (ce qui donne (2.1)).

Alors :

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha \omega - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin (\alpha-2) \omega \\ \alpha \cos \alpha \omega - \alpha \cos (\alpha-2) \omega \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} \cos \alpha \omega - \cos (\alpha-2) \omega \\ -\alpha \sin \alpha \omega + (\alpha-2) \sin (\alpha-2) \omega \end{pmatrix} c_2 = 0$$

Reste à utiliser la condition au limite en $\theta = 2\pi$. On a $\phi_\alpha(2\pi) = 0$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\alpha-2} \sin 2\pi\alpha \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \sin 2\pi\alpha \end{pmatrix} c_2 = 0$$

c_1 ou c_2 est non nulle si et seulement si $\frac{4}{\alpha-2} \sin^2 2\pi\alpha = 0$, les racines de cette équation sont évidentes, ce sont les nombres :

$$\alpha_l^{(1)} = \frac{l}{2}, l \in \mathbb{Z}$$

Ces racines sont de multiplicité $\beta_l = 2$ sauf pour $l = 4$ où on a $\beta_4 = 1$.

2) Solutions singulières du problème mêlé :

a) Si $\omega \prec 2\pi$:

Soit $\alpha_l^{(3)}$, $l \geq 1$ une énumération des racines ($\neq 0, 1, 2$) de l'équation (2.3) dans la bande :

$$1 \prec \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} \prec m + 4 - \frac{2}{p}$$

Une solution générale de (*) est donnée par (**). En utilisant (3') en $\theta = 0$, cela implique la relation (I), et par suite (3') en $\theta = \omega$ et (I) donnent le système suivant d'inconnue c_1 et c_2 :

$$(S_D) \begin{cases} \left[\begin{array}{l} [-\alpha(1-\nu) \sin \alpha \omega - \frac{\alpha[4+\alpha(1-\nu)]}{(\alpha-2)} \sin (\alpha-2) \omega] c_1 + \\ [-\alpha(1-\nu) \cos \alpha \omega - [4-\alpha(1-\nu)] \cos (\alpha-2) \omega] c_2 \end{array} \right] = 0 \\ \left[\begin{array}{l} [\alpha(1-\nu) \cos \alpha \omega - \frac{\alpha}{(\alpha-2)} [4+(\alpha-2)(1-\nu)] \cos (\alpha-2) \omega] c_1 \\ -[\alpha(1-\nu) \sin \alpha \omega - [4+(\alpha-2)(1-\nu)] \sin (\alpha-2) \omega] c_2 \end{array} \right] = 0 \end{cases}$$

(S_D) admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déterminant est nul, ceci donne bien l'équation transcendante (2.3). Donc pour tout α ($\neq 0, 1, 2$) réelle ou complexe solution de (2.3) les solutions du système (S_D) décrivent bien une droite.

Donc le choix de c_1 par exemple détermine bien les autres $c_i, i = 2$ à 4.

Soit :

$$\begin{aligned} c_1 &= -\alpha(1-\nu)\cos\alpha\omega - [4 - \alpha(1-\nu)]\cos(\alpha-2)\omega, \\ c_2 &= -\alpha(1-\nu)\sin\alpha\omega - \frac{\alpha[4 - \alpha(1-\nu)]}{(\alpha-2)}\sin(\alpha-2)\omega. \end{aligned}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} c_1 &= -\alpha(1-\nu)\sin\alpha\omega - [4 + (\alpha-2)(1-\nu)]\sin(\alpha-2)\omega \\ c_2 &= \alpha(1-\nu)\cos\alpha\omega - \frac{\alpha}{(\alpha-2)}[4 + (\alpha-2)(1-\nu)]\cos(\alpha-2)\omega \end{aligned}$$

et par suite c_3 et c_4 , donc :

$$\phi_\alpha(\theta) = \begin{bmatrix} \left[-\alpha(1-\nu)\sin\alpha\omega - \frac{\alpha[4+\alpha(1-\nu)]}{(\alpha-2)}\sin(\alpha-2)\omega \right] \times \\ \left[\cos\alpha\theta - \cos(\alpha-2)\theta \right] \end{bmatrix} c_2 + \begin{bmatrix} \left[-\alpha(1-\nu)\cos\alpha\omega - [4 - \alpha(1-\nu)]\cos(\alpha-2)\omega \right] \times \\ \left[\sin\alpha\theta - \frac{\alpha}{\alpha-2}\sin(\alpha-2)\theta \right] \end{bmatrix} c_1.$$

b) Si $\omega = 2\pi$ (cas de la fissure) :

Dans ce cas la solution générale (**) de (*) devient d'après l'utilisation de la condition au limite en $\theta = 0$ (ce qui donne (2.3)).

Alors :

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} -\alpha(1-\nu)\sin\alpha\omega - \frac{\alpha[4+\alpha(1-\nu)]}{(\alpha-2)}\sin(\alpha-2)\omega \\ \alpha(1-\nu)\cos\alpha\omega - \frac{\alpha}{(\alpha-2)}[4 + (\alpha-2)(1-\nu)]\cos(\alpha-2)\omega \end{array} \right) c_1 + \\ \left(\begin{array}{c} -\alpha(1-\nu)\cos\alpha\omega - [4 - \alpha(1-\nu)]\cos(\alpha-2)\omega \\ -[\alpha(1-\nu)\sin\alpha\omega - [4 + (\alpha-2)(1-\nu)]\sin(\alpha-2)\omega] \end{array} \right) c_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II})$$

c_1 ou c_2 est non nulle si et seulement si :

$$\sin^2(\alpha-1)\omega = -\frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha-1)^2\sin^2\omega + \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} = 0.$$

$\omega = 2\pi$, donc :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \alpha \in \mathbb{C} / \sin^2(\alpha-1)2\pi = \frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)}, \operatorname{Re}\alpha \succ 1 \right\} \\ &= \left\{ \alpha \in \mathbb{C} / \alpha = \frac{l}{4} \mp \frac{i}{4\pi} \log\left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right), l \succ 4 \right\}. \end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont évidentes, ce sont les nombres complexes :

$$\alpha_l^{(3)} = \frac{l}{4} \mp \frac{i}{4\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right), \quad l \succ 4.$$

Donc :

- Pour $l = 2n$, les constantes c_i sont nulles.
- Pour $l = 2n + 1$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - 2)2\pi &= \sin 2\alpha\pi = \sin 2\pi \left[\frac{l}{4} \mp \frac{i}{4\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= \sin \left[\frac{l\pi}{2} \mp \frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= \sin \frac{l\pi}{2} \cos \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \mp \cos \frac{l\pi}{2} \sin \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= (-1)^n \cos \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] = \frac{2(-1)^n}{[(1-\nu)(3+\nu)]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - 2)2\pi &= \cos 2\alpha\pi = \cos 2\pi \left[\frac{l}{4} \mp \frac{i}{4\pi} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= \cos \left[\frac{l\pi}{2} \mp \frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= \cos \frac{l\pi}{2} \cos \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \mp \sin \frac{l\pi}{2} \sin \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] \\ &= (-1)^n \sin \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right) \right] = i \frac{(-1)^n (1+\nu)}{[(1-\nu)(3+\nu)]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Remplaçant les dernières relations dans le système (II) on trouve le système suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \frac{-4\alpha(1+\nu)(-1)^n}{(\alpha-2)[(1-\nu)(3+\nu)]^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} c_1 + \\ \frac{4(-1)^n(1+\nu)}{[(1-\nu)(3+\nu)]^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} c_2 \end{array} \right] = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 \neq 0$$

et par suite c_3 et c_4 .

Donc :

$$\phi_\alpha(\theta) = \left[\sin \alpha \theta - \frac{\alpha}{\alpha - 2} \sin(\alpha - 2)\theta \right] c_1 + [\cos \alpha \theta - \cos(\alpha - 2)\theta] c_2.$$

Les valeurs exceptionnelles de $\alpha : 0, 1, 2$ sont des pôles simple de la résolvante $R(\alpha)$ de Δ^2 , et correspondent aux angles particulier ω des équations $(2.k)$, $k = 1$ à 6.

Plus précisément on a :

Proposition 2.5.2 *Dans le cas où $\alpha = 0, 1$ et 2, les solutions u de (P_k) , $k = 1$ à 6, sont régulières.*

• **k=1 (problème de Dirichlet) :**

Pour $\alpha = 0, 2$:

$$\phi(\theta) = (1 - \cos 2\theta) c_1 + (\sin \theta - 2\theta) c_3$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_2 = -2c_3 \\ c_1 = 2(\sin 2\omega - 1), & c_3 = \sin 2\omega \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = (\sin \theta - \theta \cos \theta) c_1 + c_2 \theta \sin \theta$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_3 = 0 \\ c_1 = \omega \sin \omega, & c_2 = \sin \omega - \omega \cos \omega \end{cases}$$

• **k=2 (problème de Dirichlet/S) :**

Pour $\alpha = 0, 2$:

$$\phi(\theta) = (1 - \cos 2\theta) c_1 + (\sin \theta - 2\theta) c_3$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_2 = -2c_3 \\ c_1 = \sin 2\omega - 2\omega, & c_3 = 1 - \cos 2\omega \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = (\sin \theta - \theta \cos \theta) c_1 + c_2 \theta \sin \theta$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_3 = 0 \\ c_1 = 2 \cos \omega, & c_2 = 2 \sin \omega \end{cases}$$

• **k=3 (problème mêlé) :**

Pour $\alpha = 2$:

$$\phi_2(\theta) = 0$$

Pour $\alpha = 0$:

$$\phi_0(\theta) = (1 - \cos 2\theta) c_1 + (\sin \theta - 2\theta) c_3$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_2 = -2c_3 \\ c_1 = (1 + \nu) \cos 2\omega + (1 - \nu), & c_3 = (1 + \nu) \sin 2\omega \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = (\sin \theta - \theta \cos \theta) c_1 + (\theta \cos \theta - 2\theta \sin \theta) c_3$$

où

$$\begin{cases} c_4 = -c_1, & c_2 = -2c_3 \\ c_1 = -3 \sin 2 - 2\omega, & c_3 = 1 + 3 \cos 2\omega \end{cases}$$

• **k=4 (problème de S/S) :**

Pour $\alpha = 0, 2$:

$$\phi(\theta) = \sin 2\theta c_3, \quad \omega \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

où $c_3 \neq 0$.

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = \sin \theta c_4, \quad \omega \in \{ \pi, 2\pi \}$$

où $c_4 \neq 0$

• **k=5 (problème de S/Neumann) :**

Pour $\alpha = 0$:

$$\phi_0(\theta) = c_1 \left(\theta \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \cos 2\omega + \sin 2\theta \right), \quad \omega \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

où $c_1 \neq 0$.

Pour $\alpha = 2$:

$$\phi_2(\theta) = \sin 2\theta c_3, \quad \omega \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

où $c_3 \neq 0$

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = \sin \theta c_1, \quad c_1 \neq 0$$

• **k=6 (problème de Neumann) :**

Pour $\alpha = 0$:

$$\phi_0(\theta) = \begin{cases} c_1, & \omega \notin \{\pi, 2\pi\} \\ c_1 + \left(2\frac{1+\nu}{1-\nu}\theta + \sin 2\theta\right) c_3, & \omega \in \{\pi, 2\pi\} \end{cases}$$

où $c_1, c_3 \neq 0$.

Pour $\alpha = 2$:

$$\phi_2(\theta) = \begin{cases} c_1 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \cos 2\theta + c_3 \sin 2\theta, & \omega \in \{\pi, 2\pi\} \\ c_3 \sin 2\theta, & \omega \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

où $c_1, c_3 \neq 0$

Pour $\alpha = 1$:

$$\phi_1(\theta) = \sin \theta c_1 + \cos \theta c_2, \quad c_1, c_2 \neq 0$$

2.6 Developpement singulier de la solution variationnelle du problème (P_k) , $k = 1$ à 6

C'est ici que se manifestent l'utilité des résultats des paragraphes précédents. On dispose donc de tous les ingrédients du théorème (**de régularité et décomposition**).

On s'intéresse au comportement de $u^{(k)}$, solution de (P_k) , $k = 1$ à 6, au voisinage du sommet O de Ω . En générale $u^{(k)} \notin W_p^{m+4}(\Omega)$, pour $f \in W_p^m(\Omega)$.

Cependant, le bilaplacien et les différents opérateurs au bord B_0^k et B_ω^k , étant homogènes et à coefficients constants.

On sait (cf. ([15], i) [16]) qu'il existe des nombres $c_l^{(k)}$ et $d_l^{(k)}$ tels que $(\alpha_l^{(k)}, l \geq 1)$:

$$u_R^{(k)} = u^{(k)} - \sum_{\substack{1 < \text{Re } \alpha_l^{(k)} \\ (\beta_l=1)}}^{< m+4-\frac{2}{p}} c_l^{(k)} V_l^{(k)} - \sum_{\substack{1 < \text{Re } \alpha_l^{(k)} \\ (\beta_l=2)}}^{< m+4-\frac{2}{p}} d_l^{(k)} U_l^{(k)} \in W_p^{m+4}(V) \quad (2.9)$$

à condition qu'aucun des $\text{Re } \alpha_l^{(k)}$ ne soit égale à $m + 4 - \frac{2}{p}$, $k = 1$ à 6; où β_l est la multiplicité de la racine, réelle ou complexe, $\alpha_l^{(k)}$ d'une certaine relation qu'on précisera dans la suite. $V_l^{(k)}(r, \theta) = r^{\alpha_l^{(k)}} \phi_l^{(k)}(\theta)$ est la solution du problème homogène correspondant et

$$U_l^{(k)}(r, \theta) = \begin{cases} r^{\alpha_l^{(k)}} \left[\text{Log } r \phi_l^{(k)}(\theta) + \partial_{\alpha_l^{(k)}} \phi_l^{(k)}(\theta) \right] & \text{si } \omega < 2\pi \\ r^{\alpha_l^{(k)}} \psi_l^{(k)}(\theta) & \text{si } \omega = 2\pi \end{cases}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

où α_k est tel que : $1 < \operatorname{Re} \alpha_k < m + 4 - \frac{2}{p}$, et $\phi_l^{(k)}, \psi_l^{(k)}$ est de classe C^∞ sur $]0, \omega[$.

On admet cette condition suffisante qu'il n'y a aura pas lieu de répéter et on mettra en évidence (pour $k = 1, \dots, 6$) :

- Une condition nécessaire sur σ , à savoir $\sigma - 1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(k)}$ pour que $u^{(k)} \in W_2^\sigma(\Omega)$.
- Un $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $u^{(k)} - \sum_i c_i V_i \in H^s(\Omega)$, pour tout $s < \tau$, où $u^{(k)}(r, \theta) = r^{\alpha_l^{(k)}} \phi_l^{(k)}(\theta)$

et V_i sera précisé un peu plus loin.

Exemple 2.6.1 • (cf [19]) : *Calcul du développement singulier pour le problème mêlé*

Soit $u \in W_2^2(\Omega_\omega)$ solution de (P_3) , avec $f \in W_p^m(\Omega_\omega)$; alors ils existent deux nombres c_k et d_k tel que :

$$u_R = u - \sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} < m + 4 - \frac{2}{p} \\ (\beta_l = 1)}} c_l V_l - \sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} < m + 4 - \frac{2}{p} \\ (\beta_l = 2)}} d_l U_l \in W_p^{m+4}(V) \quad (2.10)$$

à condition qu'aucun des $\operatorname{Re} \alpha_l^{(3)}$ ne soit égal à $m + 4 - \frac{2}{p}$.

Preuve. Classique et utilise les technique de transformation de Fourier avec Plancherel dans le cas L^2 et Mikhlin dans le cas général.

a) Cas de la fissure ($\omega = 2\pi$) : Dans le cas particulier où l'angle ω vaut 2π , l'équation transcendante (2.3) prend la forme :

$$\sin^2 2 \left(\alpha_l^{(3)} - 1 \right) \pi = \frac{4}{(1 - \nu)(3 + \nu)}, \quad (2.11)$$

dont les racines sont explicitement les nombres complexes conjugués deux à deux (α_{2l+1} et $\bar{\alpha}_{2l+1}$) :

$$\alpha_l^{(3)} = \left(\frac{2l + 5}{4} \right) \pm i \left[\log \left(\frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right) / 4\pi \right], \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Donc le développement (2.10), prend la forme réduite (après regroupement) :

$$u - \sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} < 2m + \frac{11}{2} - \frac{4}{p} \\ (\beta_l = 1)}} 2 c_{2l+1} \operatorname{Re} V_{2l+1} \in W_p^{m+4}(V) \quad (2.13)$$

où V_{2l+1} est donné par (2.10). De plus le cas particulier où $m = 0$ et $p = 2$, on a quatre racines $\alpha_1, \bar{\alpha}_1$ et $\alpha_2, \bar{\alpha}_2$ de parties réelles appartenant à $]1, 2[$ soit $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{4}$ et par conséquent le développement (2.10) se réduit encore une fois de plus à :

$$u - 2 [c_1 \operatorname{Re} V_1 + c_2 \operatorname{Re} V_2]$$

b) Cas d'un angle plat ($\omega = \pi$) : Dans ce cas l'équation (2.3) prend la forme :

$$\sin^2 \left(\alpha_l^{(3)} - 1 \right) \pi = \frac{4}{(1 - \nu)(3 + \nu)}$$

dont les racines sont explicitement les nombres complexes :

$$\alpha_l^{(3)} = \left(\frac{2l + 3}{2} \right) \pm i \left[\log \left(\frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right) / 2\pi \right], \quad l \in \mathbb{Z}$$

Remarque 2.6.2 *Le seuil de régularité dans les deux cas de l'angle plat et de la fissure ne dépend pas du coefficient de poisson ν .*

c) Autres angles ($\neq \pi, 2\pi$) : Regardons d'abord le cas des racines doubles de (2.3). Pour cela on utilise la proposition 1 Chap.II (cf. B. Merouani [19]) qui affirme que les racines doubles de (2.3) sont des réels et donne explicitement ces racines en fonction de ν et ω .

On utilisera d'abord les notations suivantes :

$$c_0(\nu) = \frac{4}{(1 - \nu)(3 + \nu)}$$

$$c_1(\nu) = -\frac{(1 - \nu)}{(3 + \nu)}.$$

Soit $X = 2\omega(x - 1)$, x désigne le $\text{Re}\alpha$ avec $\omega \neq 0$ (resp $X \neq 0$) (si non $c_0(\nu) = \frac{4}{(1 - \nu)(3 + \nu)}$ serait égal à 0) et cela contredit le fait que $c_0(\nu) \in]1, \frac{4}{3}[$.

Les racines doubles de l'équation transcendante : $\sin^2(\alpha - 1)\omega = c_1(\nu)(\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega + c_0(\nu)$ lorsqu'elles existent sont solution du système :

$$\begin{cases} \sin X = -t_\nu(\omega) X & (1) \\ \cos X = \left(\frac{1}{2}\right) t_\nu(\omega) X^2 - c(\nu) & (2) \end{cases}$$

où

$$t_\nu(\omega) = \left(\frac{1 - \nu}{3 + \nu} \right) \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2},$$

et

$$c(\nu) = 2c_0(\nu) - 1 = \frac{8}{(1 - \nu)(3 + \nu)} - 1.$$

(1) et (2) impliquent :

$$1 = \sin^2 X + \cos^2 X = t_\nu^2(\omega) X^2 + \left[\left(\frac{1}{2} \right) t_\nu(\omega) X^2 - c(\nu) \right]^2,$$

d'où

$$\left[\frac{t_\nu^2(\omega)}{4} \right] X^4 + t_\nu(\omega) [t_\nu(\omega) - c(\nu)] X^2 + c^2(\nu) - 1 = 0. \quad (2.14)$$

Posons $Y = X^2$; on a :

$$\left[\frac{t_\nu^2(\omega)}{4} \right] Y^2 + t_\nu(\omega) [t_\nu(\omega) - c(\nu)] Y + c^2(\nu) - 1 = 0,$$

c'est une équation du second ordre en Y :

$$\Delta_{\nu,\omega} = t_\nu^2(\omega) [t_\nu^2(\omega) - 2t_\nu(\omega) c(\nu) + 1],$$

un calcul simple montre que :

$$\Delta_{\nu,\omega} = t_\nu^2(\omega) \left[t_\nu(\omega) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right] \left[t_\nu(\omega) - \frac{1-\nu}{3+\nu} \right].$$

Donc $\Delta_{\nu,\omega} > 0, \forall \omega \neq 0$ et $\nu \in]0, 1[$ car $t_\nu(\omega) < \frac{1-\nu}{3+\nu}$ et par suite (2.14) admet deux racines :

$$Y_1 = \left\{ -[t_\nu(\omega) - c(\nu)] - \left(\left[t_\nu(\omega) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right] \left[t_\nu(\omega) - \frac{1-\nu}{3+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{2}} / [t_\nu(\omega) / 2] \right\}$$

$$Y_2 = \left\{ -[t_\nu(\omega) - c(\nu)] + \left(\left[t_\nu(\omega) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right] \left[t_\nu(\omega) - \frac{1-\nu}{3+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{2}} / [t_\nu(\omega) / 2] \right\},$$

comme

$$Y_1 \cdot Y_2 > 0 \text{ (car } [c^2(\nu) - 1] / t_\nu^2(\omega) > 0 \text{ (} t_\nu(\omega) \neq 0 \text{))}$$

et

$$Y_1 + Y_2 > 0 \text{ car } (-[t_\nu(\omega) - c(\nu)] / [t_\nu(\omega) / 2] \succ 0)$$

donc Y_1 et Y_2 vérifient $0 < Y_1 < Y_2$ et par conséquent (2.14) admet 4 racines :

$$X_1 = \pm (Y_1)^{\frac{1}{2}} \text{ et } X_2 = \pm (Y_2)^{\frac{1}{2}}$$

On vient d'établir une condition nécessaire pour que X_1 et X_2 soient racines doubles de l'équation (2.3). En reportant dans (2) on obtient la condition suffisante (après calcul et simplification) :

$$\begin{cases} \cos X_1 = -t_\nu(\omega) - \left(\left[t_\nu(\omega) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right] \left[t_\nu(\omega) - \frac{1-\nu}{3+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ \cos X_2 = -t_\nu(\omega) + \left(\left[t_\nu(\omega) - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right] \left[t_\nu(\omega) - \frac{1-\nu}{3+\nu} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.15)$$

En conclusion on peut distinguer deux cas selon que ω est solution de (2.15) avec $(\nu$ fixée bien sûr et $\omega \neq \pi$ et $2\pi)$:

1° cas : si ω n'est pas solution de (2.15) le développement (2.10), prend la forme :

$$u - \sum_{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} < 2m+4-\frac{2}{p}} c_l V_l \in W_p^{m+4}(V) \quad (2.16)$$

2° cas : si ω est solution de (2.15) (et $\omega \neq \pi$ et 2π) le développement (2.10), s'écrit encore sous la forme (2.16) lorsque

$$x_1^+ = \left(\frac{1}{2\omega} \right) (Y_1)^{\frac{1}{2}} + 1 \text{ et } x_2^+ = \left(\frac{1}{2\omega} \right) (Y_2)^{\frac{1}{2}} + 1 \text{ sont } > m + 4 - \frac{2}{p} \quad (2.17)$$

tandis qu'il s'écrit :

$$u - \left(\sum_{\substack{1 < \operatorname{Re} \alpha_l^{(3)} < m+4-\frac{2}{p} \\ (\nu_k=1)}} c_l V_l + d_{x_1^+} U_{x_1^+} + d_{x_2^+} U_{x_2^+} \right) \in W_p^{m+4}(V)$$

$$U_{x_i^+}(r, \theta) = r^{x_i^+} \left[\log r \phi_{x_i^+} + \partial_{x_i^+} \phi_{x_i^+} \right]; \quad i = 1, 2$$

lorsque (2.17) devient :

$$x_i^+ < m + 4 - \frac{2}{p} \quad (2.18)$$

On remarque en outre que les angles droites $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ peuvent être discutés dans le cadre du 1° cas. ■

2.7 Tableau des résultats de régularités des fonctions singulières des problèmes (P_k) , $k = 1$ à 6

Le tableau suivant prolonge celui de P. Grisvard (cf [15], *i*).

Principaux résultats :

Pour compléter ce travail et dans l'espoir de faciliter encore la tâche du lecteur, on présente dans les pages qui suivent les principaux résultats sous forme de tables. Les notations utilisées dans le corps des tables sont celles des paragraphes précédents. Les solutions sont considérées localement au voisinage V d'un des sommets du polygone considéré Ω . Les coordonnées sont les coordonnées polaires relatives à ce sommet, c'est-à-dire que le sommet est situé en $r = 0$ et ses côtés sont portés par les l'axes $\theta = 0$ et $\theta = \omega$ (avec $0 < \omega \leq 2\pi$).

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

Pour tous les problèmes on considère seulement la solution variationnelle. La signification des différentes colonnes du tableau est la suivante :

1ère colonne : Elle spécifie les hypothèses sur la mesure ω de l'angle considéré.

2ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta = 0$.

3ème colonne : Elle indique la condition au bord en $\theta = \omega$.

4ème colonne : Elle décrit en coordonnées polaires dans V (et à une constante multiplicative près) la (ou les) solution(s) variationnelle(s) du problème considéré, correspondant à des données régulières, qui a le moins de régularité. Autrement dit elle(s) indique(nt) les termes les plus singuliers d'un développement de toute solution variationnelle au voisinage du sommet considéré.

5ème colonne : Elle donne le plus petit nombre σ tel que la (ou les) fonction(s) indiquée(s) dans la quatrième colonne appartien(nt)t à $H^s(V)$ pour tout $s \prec \sigma$. En particulier toute solution variationnelle correspondant à des données régulières, appartient à $H^s(V)$ pour tout $s \prec \sigma$ (régularité "maximale").

6ème colonne : Elle donne le plus petit nombre τ tel que la différence entre toute solution variationnelle et les termes les plus singuliers de son développement appartienne à $H^s(V)$ pour tout $s \prec \tau$. Autrement dit soit u une solution variationnelle correspondant à des données régulières et soient V_i les solutions indiquées en colonne 4, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^s(V) \text{ pour tout } s \prec \sigma, \\ V_i \in H^s(V) \text{ pour tout } s \prec \sigma, \\ V_i \notin H^\sigma(V), \\ \exists c_i \in \mathbb{R} \text{ tels que } u - \sum_i c_i V_i \in H^s(V) \text{ pour tout } s \prec \tau. \end{array} \right.$$

7ème colonne : Elle contient des renseignements complémentaires difficiles à tabuler.

Δ^2 BILAPLACIEN DANS UN POLYGONE

$\omega < 2\pi$	u et $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big u$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ donnés	$r^\alpha \begin{bmatrix} \sin \alpha \omega - \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin (\alpha - 2) \omega \end{bmatrix}$ $\times [\cos \alpha \theta - \cos (\alpha - 2) \theta]$ $-r^\alpha \begin{bmatrix} \cos \alpha \omega - \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} \cos (\alpha - 2) \omega \end{bmatrix}$ $\times [\sin \alpha \theta - \sin (\alpha - 2) \theta]$ <p>où α désigne la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de :</p> $\begin{cases} \sin^2 (\alpha - 1) \omega = \\ (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega, \\ \operatorname{Re} \alpha > 1. \end{cases}$	$\operatorname{Re} \alpha + 1$?	<p>$\alpha = 2$ est aussi racine lorsque $\omega = tg\omega$. La solution appartient à H^3 dans un angle convexe</p>
$\omega = 2\pi$		$\& \begin{aligned} & r^{\frac{3}{2}} \left(\sin \frac{3}{2} \theta - 3 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ & r^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{3}{2} \theta - \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$	$\frac{5}{2}$	3	<p>Remplacer 3 par $\frac{7}{2}$ dans le cas de données au bord homogènes. La solution est à $W_p^2(V)$ avec $p < 4$</p>

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

$\omega \prec 2\pi$	$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} /$ $u =$ $M(u)$ donnés	$r^\alpha \begin{bmatrix} \sin \alpha \omega - \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin (\alpha - 2) \omega \end{bmatrix}$ $\times [\cos \alpha \theta - \cos (\alpha - 2) \theta]$ $-r^\alpha \begin{bmatrix} \cos \alpha \omega - \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} \cos (\alpha - 2) \omega \end{bmatrix}$ $\times [\sin \alpha \theta - \sin (\alpha - 2) \theta]$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $\begin{cases} \sin (\alpha - 1) 2\omega = \\ (\alpha - 1) \sin 2\omega, \\ \operatorname{Re} \alpha \succ 1. \end{cases}$	$1 + \operatorname{Re} \alpha$?	
$\omega = 2\pi$		$\begin{cases} \text{si } k = 2n \\ r^{\frac{5}{4}} \left(\sin \frac{-3\theta}{4} + \frac{3}{5} \sin \frac{5\theta}{4} \right) \\ \text{si } k = 2n + 1 \\ r^{\frac{5}{4}} \left(\sin \frac{-3\theta}{4} - \cos \sin \frac{5\theta}{4} \right) \end{cases}$			$\frac{9}{4}$

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$	$u = \frac{\partial u}{\partial \eta} /$ $N(u) =$ $M(u)$ donnés	$r^\alpha \begin{bmatrix} -\alpha(1-\nu) \cos \alpha\omega - \\ (\alpha\nu - \alpha + 4) \cos(\alpha - 2)\omega \end{bmatrix}$ $\times \left[\sin \alpha\theta - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha - 2)\theta \right] +$ $r^\alpha \begin{bmatrix} -\alpha(1-\nu) \sin \alpha\omega - \\ \frac{\alpha}{\alpha-2} (\alpha\nu - \alpha + 4) \sin(\alpha - 2)\omega \end{bmatrix} \times$ $\left[\cos \alpha\theta - \cos(\alpha - 2)\theta \right]$ <p>où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de :</p> $\left\{ \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha - 1)\omega + \\ \frac{1-\nu}{3+\nu} (\alpha - 1)^2 \sin^2 \omega \\ -\frac{4}{(1-\nu)(3+\nu)} \end{bmatrix} = 0, \right.$ <p>$\text{Re } \alpha > 1.$</p>	$1 + \text{Re } \alpha$		
$\omega = 2\pi$		$2 \text{Re}(r^\alpha \phi_\alpha(\theta))$ <p>où</p> $\alpha = \frac{5}{4} + \frac{i}{4\pi} \log\left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right)$ <p>et</p> $\phi_\alpha(\theta) = \sin \alpha\theta + \cos \alpha\theta -$ $\frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha - 2)\theta - \cos(\alpha - 2)\theta$	$\frac{9}{4}$	3	la solution est appartient à $W_p^2(V)$ avec $p < \frac{8}{3}$
$\omega = \pi$		$2 \text{Re}(r^\alpha \phi_\alpha(\theta))$ <p>où</p> $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{i}{2\pi} \log\left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\right)$ <p>et</p> $\phi_\alpha(\theta) = \sin \alpha\theta + \cos \alpha\theta -$ $\frac{\alpha}{\alpha-2} \sin(\alpha - 2)\theta - \cos(\alpha - 2)\theta$	$\frac{5}{2}$	3	la solution est appartient à $W_p^2(V)$ avec $p < 4$

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

$\omega \prec 2\pi$	$u = M(u) /$ $u = M(u)$ donnés	$r^\alpha [\alpha^2 \nu + \alpha(1 - \nu) - (\alpha - 2)^2] \times$ $\sin \alpha \theta \sin (\alpha - 2) \omega +$ $r^\alpha [\alpha^2 (\nu - 1) + \alpha(1 - \nu)] \times$ $\sin \alpha \omega \sin (\alpha - 2) \theta$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $\begin{cases} \sin^2 (\alpha - 1) \omega = \sin^2 \omega, \\ \operatorname{Re} \alpha \succ 1. \end{cases}$	$1 + \operatorname{Re} \alpha$		
$\omega = 2\pi$		$\&$ $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$ $r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\theta}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	la solution est appartient à $W_p^2(V)$ avec $p \prec 4$

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K) , $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$	$u = M(u) /$ $N(u) = M(u)$ donnés	$r^\alpha [\alpha^2 \nu + \alpha(1 - \nu) - (\alpha - 2)^2] \times$ $\sin \alpha \theta \sin(\alpha - 2)\omega +$ $r^\alpha [\alpha^2 \nu + \alpha(1 - \nu) - \alpha^2] \times$ $\sin \alpha \omega \sin(\alpha - 2)\theta$ où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de : $\begin{cases} \sin(\alpha - 1)2\omega = \\ \frac{1-\nu}{3+\nu}(\alpha - 1)\sin 2\omega, \\ \operatorname{Re} \alpha > 1. \end{cases}$	$1 + \operatorname{Re} \alpha$	
$\omega = 2\pi$		$\alpha = \frac{5}{4}$ et $\begin{cases} \text{si } k = 2n \\ \phi_\alpha(\theta) = \sin \frac{-3\theta}{4} - \\ \frac{16-3(1-\nu)}{5(1-\nu)} \sin \frac{5\theta}{4} \\ \text{si } k = 2n + 1 \\ \phi_\alpha(\theta) = \sin \frac{-3\theta}{4} - \\ \frac{16-(1-\nu)}{5(1-\nu)} \sin \frac{5\theta}{4} \end{cases}$	$\frac{9}{4}$	Remplacer $\frac{7}{4}$ par 2 en colonne 6 dans le cas de données au bord homogènes. la solution est à $W_p^2(V)$ avec $p < \frac{8}{3}$

2.7. TABLEAU DES RÉSULTATS DE RÉGULARITÉS DES FONCTIONS SINGULIÈRES DES PROBLÈMES (P_K), $K = 1$ À 6

$\omega < 2\pi$	$N(u) =$ $M(u) /$ $N(u) =$ $M(u)$ donnés	$r^\alpha (\alpha\nu - \alpha + 4) \times$ $[\cos(\alpha - 2)\omega - \cos\alpha\omega] \times$ $\left[\sin(\alpha - 2)\theta - \frac{(\alpha-2)(1-\nu)+4}{\alpha(1-\nu)} \sin\alpha\theta \right] +$ $r^\alpha \left[\begin{array}{l} [(\alpha - 2)(1 - \nu) + 4] \sin\alpha\omega + \\ (\alpha\nu - \alpha + 4) \sin(\alpha - 2)\omega \\ \left[\frac{(\alpha\nu - \alpha + 4)}{\alpha(1-\nu)} \cos\alpha\theta + \cos(\alpha - 2)\theta \right] \end{array} \right] \times$ <p>où α est la (ou les) racine(s) de plus petite partie réelle de :</p> $\left\{ \left[\begin{array}{l} \sin^2(\alpha - 1)\omega - \\ \left(\frac{1-\nu}{3+\nu} \right)^2 (\alpha - 1)^2 \sin^2\omega \end{array} \right] = 0, \right.$ <p style="text-align: center;">$\text{Re } \alpha > 1.$</p>	$1 + \text{Re } \alpha$	
$\omega = 2\pi$		$\& \begin{array}{l} r^{\frac{3}{2}} \left(\frac{8-3(1-\nu)}{3(1-\nu)} \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ r^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{8-(1-\nu)}{3(1-\nu)} \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{array}$	$\frac{5}{2}$	Remplacer 3 par $\frac{7}{2}$ dans le cas de données au bord homogènes. la solution est appartient à $W_p^2(V)$ avec $p < 4$

Chapitre 3

Comportement singulier des solutions du problème de Dirichlet pour le système de Lamé

Les séries trigonométriques constituent un outil très important pour l'étude des solutions de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique dans un secteur. Dans ce chapitre on mettra en évidence une série trigonométrique d'un type nouveau adaptée à l'étude des solutions du problème aux limites pour les équations de Lamé avec une condition de Dirichlet.

On montre que le comportement singulier de la solution est gouverné par une équation transcendante analogue à celle trouvée dans le contexte des plaques. On trouve dans un cas spécial, les résultats de l'opérateur de Laplace. L'étude de convergence de ces séries basée sur des relations analogues à celles de l'orthogonalité pour le Laplacien et le bilaplacien qui sera faite sur le cas important d'un domaine fissuré.

Nous nous intéressons ensuite, aux calculs des coefficients de singularité c_β, d_β , en particulier dans le cas de la fissure.

3.1 Notations

Soit Ω un corps homogène, élastique et isotrope, occupant un domaine, borné de \mathbb{R}^2 , à frontières polygonale rectiligne $\Gamma = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Gamma}_j$, les espaces de Sobolev ainsi que le problème que l'on considérera sera restreint à un coin (noté) encore Ω de sommet O , de côtés $\bar{\Gamma}_0$ et $\bar{\Gamma}_\omega$ et

d'ouverture ω vers l'intérieur de Ω . La normale et la tangente à Γ_j , $j = 0, \omega$, seront notées par η et τ au sens positif sur la frontière.

L désignera le système de Lamé :

$$Lu = \Delta u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \nabla (\operatorname{div} u)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé ($\lambda \geq 0$, $\mu > 0$). u_j , f_j ($j = 1, 2$), σ désignent respectivement les composantes du vecteur déplacement, de la densité des forces extérieures et le tenseur des contraintes linéarisées.

3.2 Calcul des solutions singulières

3.2.1 Formulation du problème (P)

On considère ici le problème gouverné par les équations de Lamé. C'est-à-dire que pour un champ de forces $f \in [L^2(\Omega)]^2$ on cherche u , si possible dans $[H^2(\Omega)]^2$, solution de

$$(P) \begin{cases} \Delta u + \nu_0 \nabla (\operatorname{div} u) = f & \text{dans } \Omega, & (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \Gamma_\omega. & (2) \end{cases}$$

ν_0 sera égal à $(1 - 2\nu)^{-1} = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu}$ où ν est le coefficient de **Poisson** ($0 < \nu < \frac{1}{2}$).

Notons que les résultats sur ce type de domaine sont valables ici et notamment l'inégalité de Korn (cf. [12]), et même dans le cas des fissures (cf. [10]), la méthode variationnelle usuelle, permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution faible $u \in [H^1(\Omega)]^2$.

Dans ce qui suit nous partirons donc d'une solution $u \in [H^1(\Omega)]^2$. De plus les théorèmes habituels de régularité (cf. [3]) permettent d'affirmer du premier coup que $u \in [H^2(\Omega \cap CV)]^2$ pour tout voisinage fermé V du sommet O de Ω . On s'intéresse donc au comportement de la solution u du problème (P) , dans un voisinage V du sommet O de Ω .

L et l'opérateur au bord étant homogène et à coefficients constants, la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$ est beaucoup mieux adaptée à la géométrie de Ω , de plus la régularité de u est essentiellement déterminée par la partie $\operatorname{Re} \alpha$.

3.2.2 Séparation des variables en coordonnées polaires

L'idée de base est le changement de variable $r = e^t$ (donc $\partial_t = r \partial_r$) transformant le domaine Ω dans la bande $B_\omega = \mathbb{R} \times]0, \omega[$. Puis considérer les solutions de la forme $u_\alpha(r, \theta) =$

3.2. CALCUL DES SOLUTIONS SINGULIÈRES

$r^\alpha v_\alpha(\theta)$, dans le système $Lu = 0$.

Soit donc le système de Lamé homogène sous la forme suivante :

$$Lu = \Delta u + \nu_0 \nabla (\operatorname{div} u) = 0 \quad (3.1)$$

où

$$\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1}$$

En coordonnées cartésiennes (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} (1 + \nu_0) \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{div} u) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \\ (1 + \nu_0) \frac{\partial}{\partial x_2} (\operatorname{div} u) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

En coordonnées polaires (3.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \nu_0 \left(\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right)^2 \right] u_1 + \nu_0 \left[\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right] \left[\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right] u_2 = 0 \\ \nu_0 \left[\cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right] \left[\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right] u_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu_0 \left(\sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \right)^2 \right] u_2 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En multipliant par r^2 on obtient :

$$\begin{cases} \left[(r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta)^2 \right] u_1 + \nu_0 [\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta] u_2 = 0 \\ \left[(r \partial_r)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta)^2 \right] u_2 + \nu_0 [\cos \theta r \partial_r - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta r \partial_r + \cos \theta \partial_\theta] u_1 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Soit $r = e^t$ donc $\partial_t = r \partial_r$ et par suite (3.4) se transforme en :

$$\begin{cases} \left[(\partial_t)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta)^2 \right] u_1 + \nu_0 [\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta] u_2 = 0 \\ \left[(\partial_t)^2 + \partial_\theta^2 + \nu_0 (\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta)^2 \right] u_2 + \nu_0 [\cos \theta \partial_t - \sin \theta \partial_\theta] [\sin \theta \partial_t + \cos \theta \partial_\theta] u_1 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Considérons les solutions de la forme $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta))$ dans (3.5) :

on déduit le système :

$$\begin{cases} \left[\partial_\theta^2 + \alpha^2 + \nu_0 [(\alpha - 1) \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] [\alpha \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] \right] v_{1,\alpha} + \\ \quad \nu_0 [(\alpha - 1) \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] [\alpha \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] v_{2,\alpha} = 0 \\ \left[\partial_\theta^2 + \alpha^2 + \nu_0 [(\alpha - 1) \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] [\alpha \cos \theta - \sin \theta \partial_\theta] \right] v_{2,\alpha} + \\ \quad \nu_0 [(\alpha - 1) \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] [\alpha \sin \theta + \cos \theta \partial_\theta] v_{1,\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w_{1,\alpha}(\theta) = \cos \theta v_{1,\alpha}(\theta) + \sin \theta v_{2,\alpha}(\theta) \\ w_{2,\alpha}(\theta) = -\sin \theta v_{1,\alpha}(\theta) + \cos \theta v_{2,\alpha}(\theta) \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système (3.6) devient dans $]0, \omega[$:

$$L_\alpha(w) = \begin{cases} w''_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0 + 1)(\alpha^2 - 1)w_{1,\alpha}(\theta) + \rho_0 w'_{2,\alpha}(\theta) = 0; \\ (\nu_0 + 1)w''_{2,\alpha}(\theta) + (\alpha^2 - 1)w_{2,\alpha}(\theta) + \rho_1 w'_{1,\alpha}(\theta) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Où :

$$\rho_0 = \nu_0(\alpha - 1) - 2 \quad \text{et} \quad \rho_1 = \nu_0(\alpha + 1) + 2$$

Les conditions aux limites homogènes donnent :

$$\begin{aligned} w_{1,\alpha}(0) &= w_{2,\alpha}(0) = 0. \\ \cos \omega w_{1,\alpha}(\omega) - \sin \omega w_{2,\alpha}(\omega) &= \sin \omega w_{1,\alpha}(\omega) + \cos \omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (1')$$

Cherchons d'abord une solution générale de (3.8). L'équation caractéristique de (3.8) est donné par :

$$\lambda^4 + 2(\alpha^2 + 1)\lambda^2 + (\alpha^2 - 1)^2 = 0$$

dont les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i(\alpha - 1) \quad \text{et} \quad \lambda_{3,4} = \pm i(\alpha + 1)$$

Donc pour $\alpha \notin \{0, \pm 1\}$ une solution générale de (3.8) est donné par :

$$w_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 \rho_0 \cos(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_0 \sin(\alpha - 1)\theta - C_3 \sin(\alpha + 1)\theta + C_4 \cos(\alpha + 1)\theta \\ -C_1 \rho_1 \sin(\alpha - 1)\theta + C_2 \rho_1 \cos(\alpha - 1)\theta - C_3 \cos(\alpha + 1)\theta - C_4 \sin(\alpha + 1)\theta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

pour $\alpha = 0$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2) \cos \theta + (C_2 - C_1) \sin \theta \\ (C_2 - C_1) \cos \theta - (C_1 + C_2) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

pour $\alpha = -1$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 + (\nu_0 + 1)[C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta] \\ C_2 - C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

pour $\alpha = 1$, on a :

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 + C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta \\ C_2 - C_3 \sin 2\theta + C_4 \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

En utilisant (3.7) pour revenir de w_α à u_α , on en déduit $u_j(r, \theta) = r^\alpha v_j(\theta)$, $j = 1, 2$, soit pour $\alpha \neq 0, \pm 1$:

$$v_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} C_1 [\nu_0 \alpha \cos(\alpha - 2)\theta - (\nu_0 + 2) \cos \alpha \theta] + C_2 [\nu_0 \alpha \sin(\alpha - 2)\theta - (\nu_0 + 2) \sin \alpha \theta] \\ -C_3 \sin \alpha \theta + C_4 \cos \alpha \theta \\ -C_1 [\nu_0 \alpha \sin(\alpha - 2)\theta + (\nu_0 + 2) \sin \alpha \theta] + C_2 [\nu_0 \alpha \cos(\alpha - 2)\theta + (\nu_0 + 2) \cos \alpha \theta] \\ -C_3 \sin \alpha \theta - C_4 \cos \alpha \theta \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ce qui donne :

$$u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (v_{1,\alpha}(\theta), v_{2,\alpha}(\theta))$$

Soulignons qu'on a obtenu la même solution que celle obtenue par Merouani [20].

3.2.3 Equation transcendante gouvernant le comportement singulier (E)

On vient de vérifier que w_α (et bien sur v_α) est solution d'un problème aux limites homogène pour un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 2 dans $]0, \omega[$, soit :

$$(P') \begin{cases} w''_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0 + 1)(\alpha^2 - 1)w_{1,\alpha}(\theta) + (\nu_0(\alpha - 1) - 2)w'_{2,\alpha}(\theta) = 0; \\ (\nu_0 + 1)w''_{2,\alpha}(\theta) + (\alpha^2 - 1)w_{2,\alpha}(\theta) + (\nu_0(\alpha + 1) + 2)w'_{1,\alpha}(\theta) = 0. \\ w_{1,\alpha}(0) = w_{2,\alpha}(0) = 0. \\ \cos \omega w_{1,\alpha}(\omega) - \sin \omega w_{2,\alpha}(\omega) = \sin \omega w_{1,\alpha}(\omega) + \cos \omega w_{2,\alpha}(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ce problème dépend analytiquement du paramètre complexe $\alpha(\nu_0)$ avec $(\nu_0 = (1 - 2\nu)^{-1})$ où ν est le coefficient de Poisson fixé ($0 \prec \nu \prec \frac{1}{2}$) : nous allons déterminer E l'ensemble de ses valeurs singulières c'est-à-dire les valeurs $\alpha = \alpha(\nu_0)$ telles que le problème ait une w_α non nulle, alors :

Toute solution variationnelle $w_\alpha \in [H^1(\Omega)]^2$ correspondant à des données régulières, appartient à $[H^s(\Omega)]^2$ pour tout $s \prec \sigma$ où $\sigma - 1$ est la borne inférieure des parties réelles des nombres appartenant à : $E \cap \{ \operatorname{Re} \alpha(\nu_0) \succ 0 \}$. Autrement dit :

$$\sigma = \inf \{ \operatorname{Re} \alpha(\nu_0), \alpha(\nu_0) \in E, \operatorname{Re} \alpha(\nu_0) \succ 0 \} + 1$$

De plus les premier termes du développement singulier de (w_α donc de v_α et par suite $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$) sont multiples de w_α correspondant à $\operatorname{Re} \alpha(\nu_0) = \sigma - 1$. La recherche

des termes suivants du développement singulier diffère selon que les $\alpha(\nu_0) \in E$ vérifiant $\operatorname{Re} \alpha(\nu_0) = \sigma - 1$ sont des valeurs singulières, semi simples ou non du problème (P') .

Proposition 3.2.1 *Le problème (P') , détermine $w_{1,\alpha}$ et $w_{2,\alpha}$ (donc $v_{1,\alpha}$ et $v_{2,\alpha}$ et par suite u_1 et u_2) non nulles lorsque $(\alpha \neq 0, \pm 1)$ est solution de l'équation caractéristique :*

$$\sin^2 \alpha \omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \quad \operatorname{Re} \alpha \succ 0 \quad (3.14)$$

Les valeurs exceptionnelles $\alpha = 0, \pm 1$ donnent l'analogue de (3.14) :

$$\begin{cases} \sin \omega = 0 & \text{pour } \alpha = \pm 1; \\ w_\alpha = 0 & \text{pour } \alpha = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Preuve. Au courant de calcul des solutions singulières, au paragraphes suivant, on déduira les relations (3.14) (resp (3.15)).

Soulignons qu'on a obtenu ici la même équation transcendante que celle obtenue dans le contexte des plaques par plusieurs auteurs (cf. [3], [[15], i]) à savoir les équations (3.14), (3.15).

Dans P. Grisvard (cf. [11]) on trouve une étude de l'équation (3.14).

Dans Blum et R. Rannacher, 1980 (cf. [3]), on trouve également des résultats systématiques pour l'analogue de l'équation (3.14). ■

3.2.4 Régularité maximale

Soit α_l, l entier $\succeq 1$, une énumération des racines de l'équation (3.14) et β_l la multiplicité correspondante, $r^\alpha v_\alpha(\theta)$ étant calculée explicitement, une condition nécessaire pour qu'elle soit $[H^\sigma(\Omega)]^2$ est $\sigma - 1 \preceq \operatorname{Re} \alpha$ (c'est-à-dire régularité maximale).

Elle est suffisante si on applique la méthode de Kondratiev [17] ou de Grisvard [[15], i]).

Théorème 3.2.2 *Soit $u \in [W_2^1(\Omega)]^2$ une solution variationnelle de (P) , alors $u \in [W_2^{m+2}(\Omega)]^2$ dès que l'équation (3.14), n'a aucune racine α_l dans la bande :*

$$0 \prec \operatorname{Re} \alpha_l \prec m + 2 - \frac{2}{p}.$$

Il est facile de vérifier que l'équation (3.14) na pas de racine dans la bande $0 \prec \operatorname{Re} \alpha \leq 1$ si $\omega \leq \pi$.

Il est intéressant de traiter le cas de la fissure ($\omega = 2\pi$) pour cela on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.3 Soit $\omega = 2\pi$; alors la solution variationnelle $u \in [W_2^1(\Omega)]^2$ du problème (P) appartient à $[W_p^2(\Omega)]^2$ dès que : $p < \frac{4}{3}$

Preuve. Soit $\omega = 2\pi$. Alors l'équation (3.14) se simplifie en : $\sin^2 2\alpha\pi = 0$ donc les racines α_l sont explicitement les nombres :

$$\alpha_l = \frac{l}{2}, \text{ avec } l \text{ un entier.}$$

Évidemment il n'y a aucune racine dans la bande $0 < \operatorname{Re} \alpha_l < \frac{1}{2}$ ce qui assure la régularité de u dans $[W_2^2(V)]^2$ pour $2 - \frac{2}{p} < \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $p < \frac{4}{3}$. ■

3.2.5 Solutions singulières du problème (P)

La présence d'un coin dans la frontière du domaine Ω , considère ici, provoque certainement des singularités du champ de vecteur déplacement u . Ces singularités qui se traduisent généralement par des valeurs " élevées " voir " infinies " de certaines composantes de u .

Il est bien connu (cf. [11]) pour le problème (P), que les solutions singulières, dans un voisinage V du sommet O du secteur Ω défini au premier partie sont de la forme :

$$V(r, \theta) = r^\alpha v_\alpha(\theta)$$

ou

$$U(r, \theta) = r^\alpha [\log r v_\alpha(\theta) + \partial_\alpha v_\alpha(\theta)].$$

Suivant que α est racine simple ou double de l'équation (3.14), où $v_\alpha \in C^\infty(]0, \omega[)^2$ est une solution du problème homogène correspondant, soit (P').

Il est immédiat de vérifier qu'un tel type de solution appartient à $[W_2^1(V)]^2$ si et seulement si $\operatorname{Re} \alpha > 0$ tandis qu'il appartient à $[W_p^{m+2}(V)]^2$ si et seulement si $\operatorname{Re} \alpha > m + 2 - \frac{2}{p}$. Ceci contredit le théorème de régularité habituel dès qu'il existe un α , solution de l'équation transcendante (3.14) dans l'intervalle $]0, m + 2 - \frac{2}{p}]$.

Les solutions singulières du problème (P) sont données dans la :

Proposition 3.2.4 Soit α_l, l entier ≥ 1 , désigne une énumération des racines de l'équation (3.14) pour tout $\alpha_l \neq 0, \pm 1$; alors les solutions singulières de (P) est données par :

$$V_l(r, \theta) = r^{\alpha_l} \varphi_{\alpha_l}(\theta) \tag{3.16}$$

$$U_l(r, \theta) = \begin{cases} r^{\alpha_l} [\operatorname{Log} r \varphi_{\alpha_l}(\theta) + \partial_{\alpha_l} \varphi_{\alpha_l}(\theta)] & \text{si } \omega < 2\pi \\ r^{\alpha_l} \psi_{\alpha_l}(\theta) & \text{si } \omega = 2\pi \end{cases} \tag{3.17}$$

3.2. CALCUL DES SOLUTIONS SINGULIÈRES

où α_l , est tel que : $0 < \text{Re } \alpha_l < m + 2 - \frac{2}{p}$, et $\varphi_{\alpha_l}(\theta), \psi_{\alpha_l}(\theta)$ sont de classe $(C^\infty)^2$ sur $[0, \omega]$ et données respectivement comme suit :

a) Si $\omega < 2\pi$:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\theta) = & \begin{bmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega \\ -(3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_0 - \rho_1) \sin \alpha\theta \end{pmatrix} \\ & + (\rho_0 + \rho_1) \begin{bmatrix} \cos(\alpha - 2)\omega \\ -\cos \alpha\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\theta \\ -(\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

b) Si $\omega = 2\pi$:

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta + 2[\nu_0(\alpha - 2) - 4] \sin \alpha\theta \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta - 2[\nu_0(\alpha + 2) + 4] \sin \alpha\theta \\ 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Preuve. a) Si $\omega < 2\pi$: Soit $\alpha_l, l \geq 1$ une énumération des racines ($\neq 0, \mp 1$) de l'équation (3.14) dans la bande :

$$0 < \text{Re } \alpha_l < m + 2 - \frac{2}{p}.$$

Une solution générale de (3.8) est donnée par (3.9). En utilisant (1') en $\theta = 0$, cela implique :

$$c_3 = \rho_1 c_2, \quad c_4 = -\rho_0 c_1, \quad (3.21)$$

et par suit (1') en $\theta = \omega$, et (3.21) donnent le système suivant d'inconnues :

$$(S_D) \begin{cases} (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\omega - \cos \alpha\omega] c_1 + [(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha\omega] c_2 = 0, \\ [-(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\omega - (3\rho_0 - \rho_1) \sin \alpha\omega] c_1 + (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\omega - \cos \alpha\omega] c_2 = 0. \end{cases}$$

(S_D) admet une solution non identiquement nulle si et seulement si son déterminant est nul. Cela donne bien l'équation caractéristique (3.14). Donc pour tout α ($\neq 0, \mp 1$), réelle ou complexe solution de (3, 14), les solutions du système (S_D) décrivent bien une droite. Donc le choix de c_1 par exemple détermine bien les autres $c_i, i = 2$ à 4.

Soit :

$$\begin{aligned} c_1 &= (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha_l - 2)\omega - (3\rho_1 - \rho_0) \sin \alpha_l \omega \\ &= 2\alpha\nu_0 \sin(\alpha_l - 2)\omega - 2[\nu_0(\alpha + 2) + 4] \sin \alpha_l \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha_l - 2)\omega - \cos \alpha_l \omega] \\ &= 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha_l - 2)\omega - \cos \alpha_l \omega] \end{aligned}$$

c_3, c_4 donné par (3.21).

d'où : (3.19) et par conséquent (3.16) et (3.17) dans le cas où $\omega < 2\pi$ et $\alpha (\neq 0, \mp 1)$.

b) Si $\omega = 2\pi$: (cas de la fissure)

Dans ce cas la solution générale (3.13) de (3.8) devient après l'utilisation de la condition au limite en $\theta = 0$

$$\begin{aligned} v_\alpha(\theta) &= \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -(\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (3\rho_0 - \rho_1) \sin \alpha\theta \end{pmatrix} c_1 \\ &\quad + \begin{pmatrix} (\rho_0 + \rho_1) \sin(\alpha - 2)\theta + (\rho_0 - 3\rho_1) \sin \alpha\theta \\ (\rho_0 + \rho_1) [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix} c_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta + 2[\nu_0(\alpha - 2) - 4] \sin \alpha\theta \end{pmatrix} c_1 \\ &\quad + \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta - 2[\nu_0(\alpha + 2) + 4] \sin \alpha\theta \\ 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix} c_2. \end{aligned}$$

Reste à utiliser la condition au limite en $\theta = \omega = 2\pi$, $v_\alpha(2\pi) = 0$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2(\rho_0 - \rho_1) \sin 2\alpha\pi \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 2(\rho_0 - \rho_1) \sin 2\alpha\pi \\ 0 \end{pmatrix} c_2 = 0.$$

Donc c_1 ou c_2 non nulle si et seulement si $4(\nu_0 + 2)^2 \sin^2 2\alpha\pi = 0$. ($\nu_0 + 2 \neq 0$)
c'est-à-dire :

$$\sin^2 2\alpha_l\pi = 0. \tag{3.22}$$

Encore une fois les racines de (3.22) sont évidentes lorsque $\omega = 2\pi$. Ce sont les nombres :

$$\alpha_l = \frac{l}{2}, \text{ avec } l \text{ entier, elles sont toutes de multiplicité } \nu_l = 2.$$

Cela conduit bien à considérer (3.19), (3.20) et par suite (3.16) et (3.17) dans le cas $\omega = 2\pi$ et α_l non entier supérieur à 1 (les autres α_l correspondant à des polynomes, donc régulières) ■

Proposition 3.2.5 Dans le cas où $\alpha = 0, \mp 1$, les solutions de (P), sont régulières, plus exactement on a pour $\alpha = 0, w = 0$, sur $]0, \omega[$.

pour $\alpha = -1, +1$ on a respectivement :

1) pour $\alpha = -1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1)(\cos 2\theta - 1) & (\nu_0 + 1)\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

où $c = (c_3, c_4)$ est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega = \pi$ ou 2π .

2) pour $\alpha = +1$:

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2\sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où $c = (c_1, c_2)$ est une constante quelconque $\neq 0$, si $\omega = \pi$ ou 2π .

Preuve. 1) Si $\alpha = 0$: la solution générale de (3.8) est donnée par (3.10).

Les conditions aux limites (1') imposent $c_1 = c_2 = 0$ donc :

$$w = 0 \text{ sur }]0, \omega[$$

2) Si $\alpha = -1$: la solution générale de (3.8) est donnée par (3.11), la condition au bord $\theta = 0$, donne :

$$c_1 = -(1 + \nu_0)c_3, \quad c_2 = -c_4 \quad (3.25)$$

l'équation (3.11) en $\theta = \omega$ et (3.25) donnent le système suivant :

$$(S_{-1}) = \begin{cases} [\nu_0 \cos \omega (\cos 2\omega - 1)] c_3 + [2 \sin \omega (\nu_0 \cos^2 \omega + 1)] c_4 = 0 \\ [\sin \omega (\nu_0 (\cos 2\omega - 1) - 2)] c_3 + [\nu_0 \sin \omega \sin 2\omega] c_4 = 0 \end{cases}$$

donc c_3, c_4 est non nulle si et seulement si $\det(S_{-1}) = 0$ c'est-à-dire $(1 + \nu_0) \sin^2 \omega = 0$, $((1 + \nu_0) \neq 0)$,

d'où (3.15), donc si $\omega = \pi, 2\pi$ on a bien (3.23) avec c_3 ou c_4 constante quelconque non nulle.

3) Si $\alpha = +1$: Cette fois ici la solution générale de (3.8) est donnée par (3.12), les conditions au bord de $]0, \omega[$, donne :

$$c_1 = -c_3, \quad c_2 = -c_4$$

et le système :

$$(S_1) = \begin{cases} 0c_1 - 2 \sin \omega c_2 = 0 \\ 2 \sin \omega c_1 + 0c_2 = 0. \end{cases}$$

Donc pour que c_1 ou c_2 soit non nulle il faut et il suffit que $\det(S_1) = 0$ c'est-à-dire $4 \sin^2 \omega = 0$ (c'est-à-dire $\omega = \pi$ ou 2π), d'où l'équation (3.15) pour $\alpha = +1$.

Donc si pour $\omega = \pi$ ou 2π on a bien (3.24) et bien sûr c_1 ou c_2 constante quelconque non nulle. ■

3.2.6 Développement singulier de la solution variationnelle du problème (P)

Soient les résultats des paragraphes précédentes, notamment les hypothèses et les résultats de la proposition 3.2.5. On dispose donc les ingrédients du théorème de (régularité et décomposition).

Théorème 3.2.6 *Soit $u \in [W_2^1(\Omega)]^2$ solution du problème (P), avec $f \in [W_p^m(\Omega)]^2$, alors il existe deux nombres c_l et d_l tels que :*

$$u_R = u - \sum_{1 < \operatorname{Re} \alpha_l (\beta_l=1) < m+2-\frac{2}{p}} c_l V_l - \sum_{1 < \operatorname{Re} \alpha_l (\beta_l=2) < m+2-\frac{2}{p}} d_l U_l \in W_p^{m+2}(V)$$

à condition qu'aucun des $\operatorname{Re} \alpha_l$ ne soit égale à $m + 2 - \frac{2}{p}$.

Pour la démonstration voir (cf. Merouani [19], pp. 23-24)

3.3 Calcul des coefficients c_β, d_β dans le cas de la fissure

Dans cette partie nous suivent la même technique d'Ora-Tcha-Kondor [26] et W. Chikouche and A. Aibeche [6] pour le bilaplacien dans un secteur S , avec différents conditions aux limites. Nous écrivons à l'aide des formules de **Bétti** une formule de Green pour l'opérateur de Lamé, qui permettra d'établir une relation entre les fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}$, cette relation réduit à une relation d'orthogonalité analogue à celle obtenue pour le Laplacien et le bilaplacien avec des conditions de Dirichlet, en appliquant cette relation pour calculer les coefficients c_α de singularités du développement $u(r, \theta) = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha v_\alpha(\theta)$ et qui sera faite dans le cas de la fissure.

3.3. CALCUL DES COEFFICIENTS C_β, D_β DANS LE CAS DE LA FISSURE

Soient S le secteur d'ouverture $\omega \leq 2\pi$, et de rayon ρ (ρ est positif et fixé) défini par :

$$S = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho, 0 < \theta < \omega\}$$

et de la frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\omega \cup \Sigma$ où :

$$\Sigma = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \theta < \omega\}$$

$$\Gamma_0 = \{(r, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\}$$

$$\Gamma_\omega = \{(r \cos \omega, r \sin \omega) \in \mathbb{R}^2, 0 < r < \rho\}$$

$v_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r, \theta) = r^\beta \varphi_\beta(\theta)$ deux fonctions telles que : $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ soit solutions du problème (P) (de plus $\text{Re} \alpha > 0$, $\text{Re} \beta > 0$).

Dans se qui suit et à l'aide d'une formule de Betti on va écrire une relation d'orthogonalité entre deux fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}$, $(v_\beta)_{\beta \in E}$, où E est l'ensemble des nombres complexes α tels que $\text{Re} \alpha > 0$ et v_α, v_β solutions de (P') et

$$E = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} / \sin^2 \alpha \omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \text{Re} \alpha > 0 \right\}.$$

• Soient Γ la frontière du secteur S définie précédent, u et v deux fonctions qui vérifient le problème (P).

Supposons que u, v sont dans $[H^1(S)]^2$, donc Lu, Lv sont dans $[L^2(S)]$.

Rappelons d'abord la formule de Betti :

On a l'équations de Lamé (parfois aussi équations de Navier) :

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} u) = 0$$

Posons :

$$Lu = \Delta u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div} u) = \Delta u + \frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad}(\text{div} u) = \Delta u + \nu_0 \text{grad}(\text{div} u) = 0. \quad (3)$$

Utilisant la formule de Laplacien :

$$\Delta u = \text{grad}(\text{div} u) - \text{rot}.\text{rot}u,$$

donc (3) sera de la forme :

$$\text{grad}(\text{div} u) - \text{rot}.\text{rot}u + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div} u) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} \text{grad}(\text{div} u) - \text{rot}.\text{rot}u = 0.$$

On a le module de Young $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, donc :

$$\left(2 + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right) \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot}.\text{rot}u = (1 + \nu_0) \text{grad}(\text{div } u) - \text{rot}.\text{rot}u = 0.$$

La fonction vectorielle Lu étant par ailleurs absolument intégrables, donc :

$$vLu = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \sigma_{ij}(u)) \right] - E(v, u), \quad i = 1, 2$$

où

$$E(v, u) = \frac{\lambda}{\mu} \text{div } v \text{div } u + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2$$

et σ_{ij} les composantes du tenseur linéarisé des contraintes correspondant, est donné par la loi de Hooke au moyen des coefficients de Lamé λ et μ tels que $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$:

$$\sigma_{ij} = (\lambda \text{div } u) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Les indices i, j sont restreints aux valeurs 1 et 2 en élasticité, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Donc

$$vLu + E(v, u) = \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j \sigma_{ij}(u)) \right], \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

Intégrant l'égalité (4) sur le secteur S , donc d'après la formule de Gauss-Ostrogradski, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_S (vLu + E(v, u)) dx &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^2 \left[\sum_{i=1}^2 (v_i \sigma_{ij}(u)) \right] \eta_j d\sigma \\ &= \int_\Gamma \sum_{i=1}^2 v_i \sigma_{i\eta}(u) d\sigma = \int_\Gamma v T_\nu u d\sigma \end{aligned}$$

où

$$T_\nu u = 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda \nu \text{div } u + \mu (\eta \times \text{rot}u) = \sigma(u) \cdot \eta$$

$\sigma(u)$ est le tenseur des contraintes, η_j est le cosinus directeur de la normale η de la surface.

Nous aboutissons en définitive l'identité :

$$\int_S (vLu + E(v, u)) dx = \int_\Gamma v \sigma(u) \cdot \eta d\sigma \quad (5)$$

dite première formule de Betti. Du fait de l'analogie avec les fonctions biharmoniques, cette formule et celles qui soient sont également appelées formule de Green.

Alors :

$$\int_S (vLu + E(v, u)) dx = \int_\Gamma v\sigma(u) \cdot \eta d\sigma.$$

$$\int_S (uLv + E(u, v)) dx = \int_\Gamma u\sigma(v) \cdot \eta d\sigma.$$

D'où :

$$\int_S (vLu - uLv) dx = \int_\Gamma (v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta) d\sigma$$

dite seconde formule de Betti.

Soulignons ici que la forme quadratique $E(v, u)$ peut être représentée comme suit :

$$E(v, u) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3\mu} \operatorname{div} v \operatorname{div} u + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Il est évident alors que pour $u = v$ la forme quadratique est l'expression de l'énergie de déformation W .

Supposons ensuite que $u = v$ et qu'ils vérifient les équations de Lamé. La formule (5) nous donne alors la formule :

$$\int_S W dx = \int_\Gamma u\sigma(u) \cdot \eta d\sigma$$

qui la troisième formule de Betti.

Puisque u (resp v) est solution du problème (P) . Alors :

$$Lu = Lv = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_S [vLu - uLv] dx &= \int_\Gamma [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_0} [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma + \int_{\Gamma_\omega} [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &\quad + \int_\Sigma [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les conditions aux limites, les intégrales sur Γ_0 et Γ_ω sont nulles. donc la formule de Green s'écrit comme suit :

$$\int_{\Sigma} [v\sigma(u) \cdot \eta - u\sigma(v) \cdot \eta] d\sigma = 0. \quad (3.26)$$

Alors pour deux fonctions $u_\alpha(r, \theta) = r^\alpha \varphi_\alpha(\theta)$, $v_\beta(r, \theta) = r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta(\theta)$, la formule (3.26) s'écrit comme suit :

$$\int_{\Sigma} [\bar{v}_\beta \sigma(u_\alpha) \cdot \eta - u_\alpha \sigma(\bar{v}_\beta) \cdot \eta] d\sigma = 0. \quad (3.27)$$

Sur Σ on a : $\eta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\rho = r$, $d\sigma = \rho d\theta$, $\theta \in [0, \omega]$.

Calculons maintenant en coordonnées polaires le tenseur des contraintes $\sigma(u)$:

On a :

$$\sigma(u) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{21}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix}$$

où

$$\sigma_{ij}(u) = (\lambda \operatorname{div} u) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = (\lambda \operatorname{div} u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u), \quad i, j = 1, 2$$

où δ_{ij} : le symbole de Kronecker, $\lambda \succeq 0$, $\mu \succ 0$ les coefficients de Lamé, ε_{ij} : les composantes du tenseur de déformation définie par :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2$$

donc :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{11}(u) \\ \sigma_{12}(u) = 2\mu \varepsilon_{12}(u) \\ \sigma_{22}(u) = \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \varepsilon_{22}(u) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} [r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)] \\ \varepsilon_{12}(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)) + \frac{\partial}{\partial x_2} (r^\alpha v_{1,\alpha}(\theta)) \right] \\ \varepsilon_{22}(u) = \frac{\partial}{\partial x_2} [r^\alpha v_{2,\alpha}(\theta)] \end{cases}$$

et d'après (3.7) :

$$\begin{cases} v_{1,\alpha}(\theta) = \cos \theta w_{1,\alpha}(\theta) - \sin \theta w_{2,\alpha}(\theta); \\ v_{2,\alpha}(\theta) = \sin \theta w_{1,\alpha}(\theta) + \cos \theta w_{2,\alpha}(\theta) \end{cases}$$

on obtient :

$$\varepsilon_{11}(u) = r^{\alpha-1} \left[(\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} + (1 - \alpha) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} - \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \sin^2 \theta w'_{2,\alpha} \right]$$

$$\varepsilon_{12}(u) = \mu r^{\alpha-1} \left[\begin{array}{c} 2(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w_{2,\alpha} + \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w'_{1,\alpha} - 2 \cos \theta \sin \theta w'_{2,\alpha} \end{array} \right]$$

$$\varepsilon_{22}(u) = r^{\alpha-1} \left[\begin{array}{c} (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} + \\ \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \cos^2 \theta w'_{2,\alpha} \end{array} \right]$$

donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u) &= r^{\alpha-1} \left[\lambda \left[(\alpha + 1) w_{1,\alpha} + w'_{2,\alpha} \right] + 2\mu (\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} \right] + \\ &2\mu r^{\alpha-1} \left[(1 - \alpha) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} - \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \sin^2 \theta w'_{2,\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(u) &= \mu r^{\alpha-1} \left[2(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{1,\alpha} + (\alpha - 1) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w_{2,\alpha} \right] + \\ &\mu r^{\alpha-1} \left[(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) w'_{1,\alpha} - 2 \cos \theta \sin \theta w'_{2,\alpha} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(u) &= r^{\alpha-1} \left[\lambda \left[(\alpha + 1) w_{1,\alpha} + w'_{2,\alpha} \right] + 2\mu (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) w_{1,\alpha} \right] + \\ &2\mu r^{\alpha-1} \left[(\alpha - 1) \cos \theta \sin \theta w_{2,\alpha} + \cos \theta \sin \theta w'_{1,\alpha} + \cos^2 \theta w'_{2,\alpha} \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sigma(u_\alpha) \cdot \eta &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) & \sigma_{12}(u) \\ \sigma_{12}(u) & \sigma_{22}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} [\lambda w'_{2,\alpha} + (\alpha(\lambda + 2\mu) + \lambda) w_{1,\alpha}] \cos \theta - \mu [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ \mu [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [\lambda w'_{2,\alpha} + (\alpha(\lambda + 2\mu) + \lambda) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \left[\frac{\lambda}{\mu} w'_{2,\alpha} + \left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \right) w_{1,\alpha} \right] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + \left[\frac{\lambda}{\mu} w'_{2,\alpha} + \left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu} \alpha + \frac{\lambda}{\mu} \right) w_{1,\alpha} \right] \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on a :

$$\frac{\lambda}{\mu} = (\nu_0 - 1) \text{ et } \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu} = (\nu_0 + 1)$$

donc

$$\sigma(u_\alpha) \cdot \eta = \mu r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha \neq \bar{\beta}$, posons :

$$\bar{v}_\beta = r^{\bar{\beta}} (\bar{v}_{1,\beta}, \bar{v}_{2,\beta}).$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (\cos \theta \bar{w}_{1,\beta} - \sin \theta \bar{w}_{2,\beta}, \sin \theta \bar{w}_{1,\beta} + \cos \theta \bar{w}_{2,\beta}) \times \\ &\quad \begin{pmatrix} [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \cos \theta - [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \sin \theta \\ [w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha}] \cos \theta + [(\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha}] \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (\cos \theta \bar{w}_{1,\beta} - \sin \theta \bar{w}_{2,\beta}, \sin \theta \bar{w}_{1,\beta} + \cos \theta \bar{w}_{2,\beta}) \times \begin{pmatrix} A_\alpha \cos \theta - B_\alpha \sin \theta \\ B_\alpha \cos \theta + A_\alpha \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha-1} (A_\alpha \bar{w}_{1,\beta} + B_\alpha \bar{w}_{2,\beta}) \end{aligned}$$

telles que :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} + ((\nu_0 + 1) \alpha + (\nu_0 - 1)) w_{1,\alpha} \\ B_\alpha &= w'_{1,\alpha} + (\alpha - 1) w_{2,\alpha} \end{aligned}$$

d'où :

$$v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta = r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} (A_{\bar{\beta}} w_{1,\alpha} + B_{\bar{\beta}} w_{2,\alpha})$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta &= \mu r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} (A_\alpha \bar{w}_{1,\beta} + B_\alpha \bar{w}_{2,\beta} - A_{\bar{\beta}} w_{1,\alpha} - B_{\bar{\beta}} w_{2,\alpha}) \\ &= \mu r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \left((\nu_0 - 1) \bar{w}_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} + \bar{w}_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \right) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_s [\bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - v_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta] d\sigma &= \int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \left((\nu_0 - 1) \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} \right) d\sigma + \\ &\quad \int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \left[\bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \right] d\sigma + \\ &\quad \int_\Sigma \mu r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] d\sigma \\ &= \mu r^{\bar{\beta} + \alpha} \int_0^\omega \left[(\nu_0 - 1) \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} - w'_{1,\alpha} \bar{w}_{2,\beta} \right] d\theta + \\ &\quad \mu r^{\bar{\beta} + \alpha} \int_0^\omega \left[\bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} - (\nu_0 - 1) w'_{2,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} \right] d\theta + \\ &\quad \mu r^{\bar{\beta} + \alpha} \int_0^\omega (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 Les fonctions $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ vérifient les conditions aux limites de Dirichlet pour $\theta = 0$ et $\theta = \omega$, donc on a :

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta.$$

En effet :

$$\int_0^\omega w'_\beta w_\alpha d\theta = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta + [w_\beta w_\alpha]_0^\omega = - \int_0^\omega w_\beta w'_\alpha d\theta$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} [\bar{v}_\beta \sigma(w_\alpha) \cdot \eta - \nu_\alpha \sigma(\bar{w}_\beta) \cdot \eta] d\sigma &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \nu_0 \bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \nu_0 \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha} + \\ (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \nu_0 [\bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha}] + \\ (\bar{\beta} - \alpha) [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu (\bar{\beta} - \alpha) \rho^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left(\begin{array}{c} \frac{\nu_0}{(\bar{\beta}-\alpha)} [\bar{w}'_{2,\beta} w_{1,\alpha} + \bar{w}'_{1,\beta} w_{2,\alpha}] + \\ [(\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta}] \end{array} \right) d\theta \\
 &= \mu (\bar{\beta} - \alpha) \rho^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\begin{array}{c} \frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (\bar{w}'_{2,\beta}, \bar{w}'_{1,\beta}) \\ + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \end{array} \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Puisque ρ non nul, on obtient :

$$\int_0^\omega \left[\frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (\bar{w}'_{2,\beta}, \bar{w}'_{1,\beta}) + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta = 0 \quad (3.28)$$

donc on a le théorème suivant :

Théorème 3.3.2 Soient $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ et $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ solutions du problème (P') , avec α et β solutions de (3.14). Alors, si $\alpha \neq \bar{\beta}$, on a :

$$\begin{aligned}
 [w_\alpha, w_\beta] &= \\
 \int_0^\omega \left[\frac{1}{(\bar{\beta}-\alpha)} \nu_0 (w'_{2,\beta}, w'_{1,\beta}) + ((1 + \nu_0) \bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) \right] \begin{pmatrix} w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} d\theta &= 0 \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Corollaire 3.3.3 Soient $w_\alpha = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$ et $w_\beta = r^\beta (w_{1,\beta}, w_{2,\beta})$ solutions du problème (P') , avec α et β solutions de (3.14). Supposons de plus que :

$$\int_0^\omega (w'_{2,\alpha}, w'_{1,\alpha}) \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0 \quad (3.30)$$

et $\alpha \neq \bar{\beta}$, alors :

$$[w_\alpha, w_\beta] = \int_0^\omega [((1 + \nu_0) w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})] \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\theta = 0 \quad (3.31)$$

Preuve. Il suffit de substituer (3.30) dans (3.29). ■

Remarque 3.3.4 Pour $w_\alpha(r, \theta) = r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})$, on définit l'opérateur linéaire T telle que :

$$T(w_\alpha) = r^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.3.5 D'après le corollaire 3.3.3, si $\alpha \neq \bar{\beta}$, on a :

$$\int_{\Sigma} (T w_\alpha \bar{w}_\beta + w_\alpha T \bar{w}_\beta) d\sigma = 0 \quad (3.32)$$

Preuve. D'après la définition de T et le corollaire 3.3.3 on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (T w_\alpha \bar{w}_\beta + w_\alpha T \bar{w}_\beta) d\sigma &= \int_{\Sigma} \left[T(r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha})) r^{\bar{\beta}} (\bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta}) + r^\alpha (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}) T(r^{\bar{\beta}} (\bar{w}_{1,\beta}, \bar{w}_{2,\beta})) \right] \\ &= 2r^{\alpha+\bar{\beta}-1} \int_0^\omega \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \\ w_{2,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\sigma + \\ &\quad 2r^{\alpha+\bar{\beta}-1} \int_0^\omega (w_{1,\alpha}, w_{2,\alpha}) \begin{pmatrix} (\nu_0 + 1) \bar{w}_{1,\beta} \\ \bar{w}_{2,\beta} \end{pmatrix} d\sigma \\ &= 2r^{\alpha+\bar{\beta}} \int_0^\omega [((\nu_0 + 1) w_{1,\alpha} \bar{w}_{1,\beta} + w_{2,\alpha} \bar{w}_{2,\beta})] d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

3.3.1 Calcul des coefficients c_β, d_β

Corollaire 3.3.6 Supposons que $u = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ soit uniformément convergente dans \bar{S} . Si $[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_\beta] \neq 0$ alors :

$$c_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (T u \cdot \bar{u}_\beta + u \cdot T \bar{u}_\beta) d\sigma}{[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_\beta]}.$$

Preuve. on a

$$\int_{\Sigma} (T u \cdot \bar{u}_\beta + u \cdot T \bar{u}_\beta) d\sigma = \int_{\Sigma} \left(T \left[\sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \right] \cdot \bar{u}_\beta + \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \cdot T \bar{u}_\beta \right) d\sigma$$

T étant un opérateur linéaire, donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T(\bar{u}_\beta)) d\sigma &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \left[\int_{\Sigma} \left[T(r^\alpha \varphi_\alpha) . r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta + r^\alpha \varphi_\alpha . T(r^{\bar{\beta}} \bar{\varphi}_\beta) \right] d\sigma \right] \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \int_{\Sigma} \left[r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma + \\
 &\quad \sum_{\alpha \in E} c_\alpha \int_{\Sigma} \left[r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \begin{pmatrix} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha-1} \int_{\Sigma} \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \varphi_{\bar{\beta}} + \varphi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\
 &= \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \varphi_{\bar{\beta}} + \varphi_\alpha \begin{pmatrix} (1+\nu_0) \varphi_{1,\bar{\beta}} \\ \varphi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\theta \\
 &= 2 \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^{\bar{\beta}+\alpha} \int_0^\omega [(1+\nu_0) \varphi_{1,\alpha} \varphi_{1,\bar{\beta}} + \varphi_{2,\varphi} \varphi_{2,\bar{\beta}}] .
 \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3.3.5, on trouve que les termes de la somme s'annulent sauf celui correspondant à $\alpha = \bar{\beta}$ et on obtient :

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma = 2c_{\bar{\beta}} \rho^{2\bar{\beta}-1} [\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}] .$$

Alors si $[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}]$ est différent de 0 :

$$c_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_\beta + u.T\bar{u}_\beta) d\sigma}{[\varphi_{\bar{\beta}}, \varphi_{\bar{\beta}}]} .$$

■

Remarque 3.3.7 La technique que nous allons utiliser pour l'étude de la série trigonométrique sera basée sur le théorème 3.3.2 et le corollaire 3.3.6. Dans ce qui suit nous étudions la série trigonométrique dans le cas particulier de la fissure ($\omega = 2\pi$) qui est un cas très important de singularités de domaines. La connaissance explicite des racines de (E) simplifie les calculs.

3.4 Étude complète du cas de la fissure

Pour simplifier les calculs, nous décomposons toute solution u du problème (P) en deux parties par rapport à θ :

$$u = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$$

3.4.1 Étude de la première partie

Concernant la première partie : l'expression de φ_α est donnée par :

$$\varphi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos\alpha\theta] \\ -2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta + 2[\nu_0(\alpha - 2) - 4] \sin\alpha\theta \end{pmatrix}$$

avec

$$E = \left\{ \alpha \in \mathbb{C}, \sin^2 \alpha\omega = \left(\frac{\nu_0}{\nu_0 + 2} \alpha \right)^2 \sin^2 \omega, \operatorname{Re} \alpha > 0 \right\}$$

$\omega = 2\pi$ d'où :

$$E = \left\{ \alpha = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - 2)\omega &= \sin \alpha\omega = \sin k\pi = 0 \\ \cos(\alpha - 2)\omega &= \cos \alpha\omega = \cos k\pi = (-1)^k \end{aligned}$$

Remarquons que : $\forall \alpha \in E, \sin(\alpha - 2)\omega = \sin \alpha\omega = 0$.

D'autre part :

- Si $k = 2m$ alors :

$$\cos(\alpha - 2)\omega = \cos \alpha\omega = 1 \tag{3.33}$$

d'où :

$$\varphi_\alpha(0) = \varphi_\alpha(\omega) = 0$$

- Si $k = 2m + 1$ alors :

$$\cos(\alpha - 2)\omega = \cos \alpha\omega = -1 \tag{3.34}$$

d'où :

$$\varphi_\alpha(0) = -\varphi_\alpha(\omega) = 0$$

• **Calcul de c_β :**

En appliquant le corollaire 3.3.6 pour $u = \sum_{\beta \in E} c_\beta r^\beta \varphi_\beta$

$$c_\beta = \frac{1}{2} \rho^{-2\beta+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma}{[\varphi_\beta, \varphi_\beta]}$$

$$\begin{aligned} \bullet [\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^\omega \left[\begin{pmatrix} \varphi_{1,\beta} \\ \varphi_{2,\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\beta} \\ \varphi_{2,\beta} \end{pmatrix} \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) \varphi_{1,\beta}^2 + \varphi_{2,\beta}^2] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 [\cos(\beta - 2)\theta - \cos\beta\theta]^2] d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} [-(2\beta\nu_0) \sin(\beta - 2)\theta + (2[\nu_0(\beta - 2) - 4]) \sin\beta\theta]^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 [\cos^2(\beta - 2)\theta + \cos^2\beta\theta - 2\cos(\beta - 2)\theta \cos\beta\theta] d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} [(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + 4([\nu_0(\beta - 2) - 4])^2 \sin^2\beta\theta] d\theta - \\ &\quad \int_0^\omega 8[(\beta\nu_0)[\nu_0(\beta - 2) - 4] \sin(\beta - 2)\theta \sin\beta\theta] d\theta \\ &= \int_0^\omega (1 + \nu_0) (2\alpha\nu_0)^2 [\cos^2(\beta - 2)\theta + \cos^2\beta\theta] d\theta + \\ &\quad \int_0^\omega [(2\alpha\nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + 4([\nu_0(\alpha - 2) - 4])^2 \sin^2\beta\theta] d\theta - \\ &\quad 2 \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) (2\alpha\nu_0)^2 \cos(\beta - 2)\theta \cos\beta\theta +] d\theta - \\ &\quad 8 \int_0^{2\pi} \alpha\nu_0 [\nu_0(\alpha - 2) - 4] \sin(\beta - 2)\theta \sin\beta\theta d\theta. \end{aligned}$$

3.4. ÉTUDE COMPLÈTE DU CAS DE LA FISSURE

Calculons premièrement les intégrales : $\int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta$, $\int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta$.

Par double intégration par parties, et les relations (3.33), (3.34) on obtient :

$$\bullet \int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta = \frac{1}{\beta - 2} [\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} - \frac{\beta}{(\beta - 2)^2} [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} \\ + \frac{\beta^2}{(\beta - 2)^2} \int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta$$

$$[\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} = [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} = 0,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta = 0$$

$$\bullet \int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = \frac{-1}{\beta - 2} [\sin \beta \theta \cos(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} + \frac{\beta}{(\beta - 2)^2} [\cos \beta \theta \sin(\beta - 2)\theta]_0^{2\pi} \\ + \frac{\beta^2}{(\beta - 2)^2} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = 0$$

d'où :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta = 0.$$

Alors :

$$[\varphi_\beta, \varphi_\beta] = \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 [\cos^2(\beta - 2)\theta + \cos^2 \beta \theta] d\theta + \\ \int_0^{2\pi} [(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + 4([\nu_0(\beta - 2) - 4])^2 \sin^2 \beta \theta] d\theta \\ = \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 \left[\frac{1 + \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta\theta}{2} \right] d\theta + \\ \int_0^{2\pi} \left[(2\beta\nu_0)^2 \left(\frac{1 - \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} \right) + 4([\nu_0(\beta - 2) - 4])^2 \left(\frac{1 - \cos 2\beta\theta}{2} \right) \right] d\theta$$

$$\begin{aligned}
[\varphi_\beta, \varphi_\beta] &= \int_0^{2\pi} \left[(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 + \left(\frac{(2\beta\nu_0)^2}{2} + \frac{4([\nu_0(\beta - 2) - 4]^2)}{2} \right) \right] d\theta + \\
&\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 - (2\beta\nu_0)^2}{2} \right) \cos 2(\beta - 2)\theta \right] d\theta + \\
&\int_0^{2\pi} \left(\frac{(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 - 4([\nu_0(\beta - 2) - 4]^2)}{2} \right) \cos 2\beta\theta d\theta \\
&= \left[\frac{2(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0)^2 + (2\beta\nu_0)^2 + 4([\nu_0(\beta - 2) - 4]^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \left[\frac{(2\nu_0 + 3) (2\beta\nu_0)^2 + 4([\nu_0(\beta - 2) - 4]^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{(2\nu_0 + 3) (4\beta^2\nu_0^2) + 4(\nu_0(\beta - 2) - 4)^2}{2} 2\pi \\
&= 4\pi [(2\nu_0 + 3) \beta^2\nu_0^2 + (\nu_0(\beta - 2) - 4)^2]
\end{aligned}$$

qui est bien différent de 0.

donc

$$c_\beta = \frac{1}{8\pi [(2\nu_0 + 3) \beta^2\nu_0^2 + (\nu_0(\beta - 2) - 4)^2]} \rho^{-2\beta+1} \int_{\Sigma} (Tu.u_\beta + u.Tu_\beta) d\sigma$$

- Soit le sous secteur suivant :

$$S_{\rho_0} = S \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, r \prec \rho_0\} \cdot \rho_0 \prec \rho$$

On définit les traces sur Σ suivantes :

$$\mathfrak{U}_1 = \zeta_1 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2, \text{ et } T\mathfrak{U}_1 = \phi_1 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2$$

3.4. ÉTUDE COMPLÈTE DU CAS DE LA FISSURE

On a sur $S_{\rho_0} : \rho = \rho_0, d\sigma = \rho_0 d\theta, \theta \in [0, \omega]$

$$\begin{aligned}
 c_\alpha &= \frac{1}{8\pi [(2\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]} \rho_0^{-2\alpha+1} \int_{\Sigma} (Tu.u_\alpha + u.Tu_\alpha) d\sigma \\
 &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(2\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]} \int_{\Sigma} \rho_0^{-\alpha+1} \left(\begin{array}{c} \phi_1 \cdot \rho_0^\alpha \varphi_\alpha + \\ \zeta_1 \cdot \rho_0^{\alpha-1} \left(\begin{array}{c} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) \end{array} \right) d\sigma \\
 &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(2\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho_0 \phi_1 \left(\begin{array}{c} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) + \\ \zeta_1 \left(\begin{array}{c} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) \end{array} \right) (\rho_0, \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Posons :

$$c_\alpha = A_{\alpha,\nu_0} \int_0^{2\pi} \left(\rho_0 \phi_1 \left(\begin{array}{c} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) + \zeta_1 \left(\begin{array}{c} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) \right) (\rho_0, \theta) d\theta \quad (3.35)$$

avec

$$A_{\alpha,\nu_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(2\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]}$$

Corollaire 3.4.1 Si \mathfrak{U}_1 est solution du problème (P) alors :

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha \quad (3.36)$$

où c_α est donnée par (3.35) et où la série est convergente uniformément dans \overline{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \prec \rho$. De plus (3.36) converge globalement dans $[H^1(S_\rho)]^2$ si $\alpha^{\frac{3}{2}} c_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Preuve. i) Si $\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} c_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$ a lieu, alors d'après le corollaire 3.3.6

$$\begin{aligned}
 c_\alpha &= \frac{1}{2 [(2\nu_0 + 3)(4\alpha^2\nu_0^2) + 4(\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]} \pi \rho^{-2\alpha+1} \int_{\Sigma} (Tu.u_\alpha + u.Tu_\alpha) d\sigma \\
 &= \frac{\rho^{-\alpha}}{8 [(2\nu_0 + 3)(\alpha^2\nu_0^2) + (\nu_0(\alpha - 2) - 4)^2]} \pi \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho \phi_1 \left(\begin{array}{c} \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) + \\ \zeta_1 \left(\begin{array}{c} (1 + \nu_0) \varphi_{1,\alpha} \\ \varphi_{2,\alpha} \end{array} \right) \end{array} \right) (\rho, \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

qui est la relation (3.35).

ii) Si \mathfrak{U}_1 est solution du problème (P) et c_α donnée par (3.35) alors $c_\alpha = o(\alpha\rho^{-\alpha})$, ceci entraîne la convergence uniforme de la série dans \bar{S}_{ρ_0} vers un certain W_1 vérifiant (P).

D'après Grisvard Geymonat [9] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{U}_1 = \sum_{\alpha \in E} K_\alpha r^\alpha \varphi_\alpha$$

qui est converge pour $r \prec \varepsilon$.

Le théorème implique que $K_\alpha = c_\alpha$ alors W_1 et \mathfrak{U}_1 coïncide dans S_ε . Elles coïncides dans S_{ρ_0} , puisqu'elles y sont analytiquement réelles. ■

Remarque 3.4.2 Si ζ_1 appartient à l'espace $[H^2(]0, 2\pi[)]^2$ et ϕ_1 appartient à $[H^1(]0, 2\pi[)]^2$, alors on a $c_\alpha = o(\alpha\rho^{-\alpha})$ et on a la convergence uniforme de la série dans \bar{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \leq \rho$.

3.4.2 Étude de la deuxième partie

Dans cette partie on a ainsi la représentation suivante :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$$

avec

$$E = \left\{ \alpha = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^* \right\} \text{ puisque } \omega = 2\pi,$$

et

$$\psi_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} 2\alpha\nu_0 \sin(\alpha - 2)\theta - 2[\nu_0(\alpha + 2) + 4] \sin \alpha\theta \\ 2\alpha\nu_0 [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta] \end{pmatrix}$$

• Calcul de d_β :

Corollaire 3.4.3 Supposons que $u = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ soit uniformément convergente dans \bar{S} . Si $[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_\beta] \neq 0$ alors :

$$d_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta}+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\bar{\beta}} + u.T\bar{u}_{\bar{\beta}}) d\sigma}{[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_\beta]}$$

Preuve. on a

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\beta} + u.T\bar{u}_{\beta}) d\sigma = \int_{\Sigma} \left(T \left[\sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} r^{\alpha} \psi_{\alpha} \cdot \bar{u}_{\beta} \right] + \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} r^{\alpha} \psi_{\alpha} \cdot T\bar{u}_{\beta} \right) d\sigma.$$

D'après la linéarité de T on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\beta} + u.T\bar{u}_{\beta}) d\sigma &= \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} \left[\int_{\Sigma} \left(Tr^{\alpha} \psi_{\alpha} \cdot r^{\bar{\beta}} \bar{\psi}_{\beta} + r^{\alpha} \psi_{\alpha} \cdot T \left(r^{\bar{\beta}} \bar{\psi}_{\beta} \right) \right) d\sigma \right] \\ &= \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} \left[\int_{\Sigma} \left(r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right) \right] d\sigma + \\ &\quad \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} \left[\int_{\Sigma} r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\ &= \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} r^{\bar{\beta} + \alpha - 1} \int_{\Sigma} \left[\begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \psi_{\bar{\beta}} + \psi_{\alpha} \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\sigma \\ &= 2 \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} r^{\bar{\beta} + \alpha} \int_0^{\omega} \left[\begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\varphi} \end{pmatrix} \psi_{\bar{\beta}} + \psi_{\alpha} \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\bar{\beta}} \\ \psi_{2,\bar{\beta}} \end{pmatrix} \right] d\theta \\ &= 2 \sum_{\alpha \in E} d_{\alpha} r^{\bar{\beta} + \alpha} \int_0^{\omega} [(1 + \nu_0) \psi_{1,\alpha} \psi_{1,\bar{\beta}} + \psi_{2,\varphi} \psi_{2,\bar{\beta}}] d\theta. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3.3.5, on trouve que les termes de la somme s'annulent sauf celui correspondant à $\alpha = \bar{\beta}$ et on obtient :

$$\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\beta} + u.T\bar{u}_{\beta}) d\sigma = 2d_{\bar{\beta}} \rho^{2\bar{\beta} - 1} [\psi_{\bar{\beta}}, \psi_{\beta}].$$

Alors si $[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_{\beta}]$ est différent de 0 :

$$d_{\bar{\beta}} = \frac{1}{2} \rho^{-2\bar{\beta} + 1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu.\bar{u}_{\beta} + u.T(\bar{u}_{\beta})) d\sigma}{[\psi_{\bar{\beta}}, \psi_{\beta}]}.$$

■

• Calcul de d_{β} :

3.4. ÉTUDE COMPLÈTE DU CAS DE LA FISSURE

En appliquant le corollaire 3.3.6 pour $u = \sum_{\beta \in E} d_\beta r^\beta \psi_\beta$ d'où :

$$d_\beta = \frac{1}{2} \rho^{-2\beta+1} \frac{\int_{\Sigma} (Tu \cdot u_\beta + u \cdot Tu_\beta) d\sigma}{[\psi_\beta, \psi_\beta]}$$

Calcul de $[\psi_\beta, \psi_\beta]$:

$$\begin{aligned} [\psi_\beta, \psi_\beta] &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \psi_{1,\beta}(\theta) \\ \psi_{2,\beta}(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \nu_0) \psi_{1,\beta}(\theta) \\ \psi_{2,\beta}(\theta) \end{pmatrix} d\theta \\ [\psi_\beta, \psi_\beta] &= \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) \psi_{1,\beta}^2(\theta) + \psi_{2,\beta}^2(\theta)] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) [(2\beta\nu_0) \sin(\alpha - 2)\theta - (2(\nu_0(\beta + 2) + 4)) \sin \alpha\theta]^2 d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} [(2\beta\nu_0) [\cos(\alpha - 2)\theta - \cos \alpha\theta]]^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) [(2\beta\nu_0)^2 \sin^2(\beta - 2)\theta + (2(\nu_0(\beta + 2) + 4))^2 \sin^2 \beta\theta] d\theta - \\ &\quad 2 \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) (2\beta\nu_0) (2(\nu_0(\beta + 2) + 4)) \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta\theta] d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} [(2\beta\nu_0)^2 [\cos^2(\beta - 2)\theta + \cos^2 \beta\theta - 2 \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta\theta]] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \nu_0) \left[(2\beta\nu_0)^2 \left(\frac{1 - \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} \right) + (2(\nu_0(\beta + 2) + 4))^2 \left(\frac{1 - \cos 2\beta\theta}{2} \right) \right] d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} (2\beta\nu_0)^2 \left[\frac{1 + \cos 2(\beta - 2)\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta\theta}{2} \right] d\theta - \\ &\quad 8 \int_0^{2\pi} [(1 + \nu_0) (\beta\nu_0) ((\nu_0(\beta + 2) + 4)) \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta\theta] d\theta - \\ &\quad 8 \int_0^{2\pi} [(\beta\nu_0)^2 \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta\theta] d\theta. \end{aligned}$$

Par double intégration par partie les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\beta - 2)\theta \sin \beta \theta d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \cos(\beta - 2)\theta \cos \beta \theta d\theta$$

sont nulles, donc :

$$\begin{aligned} [\psi_\beta, \psi_\beta] &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(1 + \nu_0)}{2} [(2\beta\nu_0)^2 + (2(\nu_0(\beta + 2) + 4))^2] + (2\beta\nu_0)^2 \right] d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{(2\beta\nu_0)^2 - (1 + \nu_0)(2\beta\nu_0)^2}{2} \right) \cos 2(\beta - 2)\theta d\theta + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{(2\beta\nu_0)^2 - (1 + \nu_0)(2(\nu_0(\beta + 2) + 4))^2}{2} \right) \cos 2\beta\theta d\theta \\ &= \left[\frac{2(2\beta\nu_0)^2 + (1 + \nu_0)(2\beta\nu_0)^2 + (1 + \nu_0)(2(\nu_0(\beta + 2) + 4))^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2(4\beta^2\nu_0^2) + (1 + \nu_0)(4\beta^2\nu_0^2) + 4(1 + \nu_0)[\nu_0(\beta + 2) + 4]^2}{2} 2\pi \\ &= (\nu_0 + 3)(4\beta^2\nu_0^2) + 4(1 + \nu_0)[\nu_0(\beta + 2) + 4]^2 \pi \end{aligned}$$

qui est bien différent de 0.

Donc

$$d_\beta = \frac{1}{8\pi [(3 + \nu_0)\beta^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\beta + 2) + 4]^2]} \rho^{-2\beta+1} \int_\Sigma (Tu.u_\beta + u.Tu_\beta) d\sigma$$

- Soit le sous secteur suivant :

$$S_{\rho_0} = S \cap \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2, r \prec \rho_0\} \cdot \rho_0 \prec \rho$$

On définit les traces sur Σ suivantes :

$$\mathfrak{U}_2 = \zeta_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2, \quad \text{et } T\mathfrak{U}_2 = \phi_2 \in \left[\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \right]^2$$

3.4. ÉTUDE COMPLÈTE DU CAS DE LA FISSURE

On a sur $S_{\rho_0} : \rho = \rho_0, d\sigma = \rho_0 d\theta, \theta \in [0, \omega]$

$$\begin{aligned}
 d_\alpha &= \frac{1}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]} \rho_0^{-2\alpha+1} \int_0^{2\pi} (Tu.u_\alpha + u.T(u_\alpha)) d\sigma \\
 &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]} \int_0^{2\pi} \rho_0^{1-\alpha} \left(\begin{array}{c} \phi_2 \cdot \rho_0^\alpha \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \cdot \rho_0^{\alpha-1} \begin{pmatrix} (1 + \nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) d\theta \\
 &= \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho_0 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) (\rho_0, \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

Posons :

$$d_\alpha = B_{\alpha,\nu_0} \int_0^{2\pi} \left(\rho_0 \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \right) (\rho_0, \theta) d\theta \quad (3.37)$$

avec

$$B_{\alpha,\nu_0} = \frac{\rho_0^{-\alpha}}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]}$$

Corollaire 3.4.4 Si \mathfrak{U}_2 est solution du problème (P) alors :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha \quad (3.38)$$

où d_α est donnée par (3.37) et où la série est convergente uniformément dans \bar{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \prec \rho$. De plus (3.38) converge globalement dans $[H^1(S_\rho)]^2$ si $\alpha^{\frac{3}{2}} c_\alpha \rho^\alpha \in l^2$.

Preuve. i) Si $\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} d_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$ a lieu, alors d'après le corollaire 3.4.3

$$\begin{aligned}
 d_\alpha &= \frac{\rho^{-2\alpha}}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]} \int_\Sigma (Tu.u_\alpha + u.T(u_\alpha)) d\sigma \\
 &= \frac{\rho^{-\alpha}}{8\pi [(\nu_0 + 3)\alpha^2\nu_0^2 + (1 + \nu_0)[\nu_0(\alpha + 2) + 4]^2]} \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \rho \phi_2 \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} + \\ \zeta_2 \begin{pmatrix} (1 + \nu_0)\psi_{1,\alpha} \\ \psi_{2,\alpha} \end{pmatrix} \end{array} \right) (\rho, \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

qui est la relation (3.37).

ii) Si \mathfrak{U}_2 est solution du problème (P) et d_α donnée par (3.37) alors $d_\alpha = o(\alpha\rho^{-\alpha})$, ceci entraîne que la série est convergente uniformément dans \overline{S}_{ρ_0} vers un certain W_2 vérifiant (P).

D'après Grisvard Geymonat [9] il existe ε positif, suffisamment petit tel que la solution du problème (P) s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{U}_2 = \sum_{\alpha \in E} H_\alpha r^\alpha \psi_\alpha$$

qui est converge pour $r \prec \varepsilon$.

Le théorème implique que $H_\alpha = d_\alpha$ alors W_2 et \mathfrak{U}_2 coïncide dans S_ε . Elles coïncides dans S_{ρ_0} , puisqu'elles y sont analytiquement réelles. ■

Remarque 3.4.5 Si ζ_2 appartient à l'espace $[H^2(]0, 2\pi[)]^2$ et ϕ_2 appartient à $[H^1(]0, 2\pi[)]^2$, alors on a $d_\alpha = o(\alpha\rho^{-\alpha})$ et on a la convergence uniforme de la série dans \overline{S}_{ρ_0} pour tout $\rho_0 \leq \rho$.

Remarque 3.4.6 Pour $\nu_0 = 0$ on obtient la série trigonométrique de l'équation de Laplace dans un secteur.

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons traité deux types de problèmes issus de la mécanique des milieux continus.

Dans la première partie et dans le cadre de la mécanique des solides, plus précisément en théorie des plaques minces, nous avons donné une description explicite des solutions faibles de quelques problèmes aux limites gouvernés par le bilaplacien dans un polygone plan borné.

Le comportement singulier des solutions étant gouverné par une série d'équations transcendantes. Nous avons mis en évidence, pour chaque cas (y compris celui de la fissure et de l'angle plat lorsqu'il s'agit d'un problème mêlé), les fonctions singulières ainsi que le développement singulier de la solution. On a retrouvé ainsi les résultats de P. Grisvard [15],i) concernant le problème de Dirichlet et nous avons regroupé les résultats essentiels dans un tableau destiné aux utilisateurs.

Dans la deuxième partie, et dans le cadre de la mécanique des milieux continus, nous avons étudié en détail les singularités de la solution variationnelle d'un problème aux limites pour le système de Lamé (élasticité) avec une condition de Dirichlet. Nous avons mis en évidence une série trigonométrique d'un type nouveau adaptée à l'étude des solutions de problème aux limites pour le système de Lamé et comme l'étude de la convergence de la série nécessite des relations d'orthogonalité, nous avons établi grâce à une formule de Green pour l'opérateur de Lamé une relation d'orthogonalité entre les fonctions $(v_\alpha)_{\alpha \in E}$ analogues à celles de l'orthogonalité pour le Laplacien et le bilaplacien dans un secteur plan S , qui facilite le calcul des coefficients de singularité qui est très important, d'une part pour les mécaniciens et d'autres part pour améliorer la convergence de la série. Le calcul étant dans le cas de la fissure et par conséquent nous avons montré la convergence de la nouvelle série. Rappelons que cette partie constitue l'originalité de notre travail.

Enfin, comme deux prolongements éventuels de ce travail, l'étude :

- 1- Le cas des plaques à épaisseur variable.
- 2- Généralisation de la deuxième partie au cas où l'ouverture de secteur est différente de 2π .

Bibliographie

- [1] **R. B. Adams**-Sobolev spaces, Academic press, 1975.
- [2] **S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg**.- Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, Communications on pure & Applied Maths, 12, 1959 p.623-727 et II même journal 17, 1964 p. 35-92.
- [3] **H. Blum & R. Rannacher**, On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, Maths. Methods. App. Sci., 2 (1980), 556-581.
- [4] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application. Masson (1983).
- [5] **Cédric Camier**, Modélisation et étude numérique de vibrations non-linéaire des plaques circulaires minces imparfaites, Application aux cymbales. Thèse Présentée et soutenue publiquement le 2 février 2009 pour l'obtention du Docteur de l'Ecole Polytechnique.
- [6] **W. Chikouche** and **A. Aibeche**, Coefficients of singularities of the biharmonic problem of Neumann type : case of the crack. IJMMS 2003 : 5, 305-313, Hindawi Publishing Corp.
- [7] **W. Chikouche**, Etude spectrale du problème de bilaplacien, Thèse de Magister à l'université de constantine, Alger, 2000
- [8] **E. Gagliardo**.-Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol 27, 1957, p. 284-307.
- [9] **P. Grisvard, G. Geymonat**- Singularities and constructive methods for treatment, Proceeding Oberwalfach, Springer-Verlag, 1983, p. 123-126.

- [10] **P. Grisvard**, Solutions singulières du système de Lamé, Preprint No 173 et No 175, Université de Nice, (1987).
- [11] **P. Grisvard**, Singularities in boundary values problems, Recherches en Mathématiques Appliquées, Vol.22, Masson, Paris, 1992 (French).
- [12] **P. Grisvard**, Le problème de Dirichlet pour les équations de lamé, C.R.A.S, T.304, série I , No 3, (1987),p. 71-73.
- [13] **P. Grisvard**, Behavior of the solutions an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Sumposium on Numerical solutions of partial differential Equations III, B. Hubbard Editor, 1975, p. 207-274.
- [14] **P. Grisvard**, Résolvante du Laplacien dans un polygone et singularités des équations elliptiques ou paraboliques, CRAS, Paris, t.301 Serie I No 5, 1985 p.181-183.
- [15] **P. Grisvard** : i) Boundary value problems in plan polygons. Instructions for use, E.D.F, Bulletin de la direction des études et recherches, serie C, Mathématique no.1, 1986, p.21-59.
ii) Le problème de Dirichlet pour les équations de Lamé, C. R. A. S. t.103, p.71-73, 1986.
- [16] **P. Grisvard**.- Elleptic problems in non smooth domains, Monographs and Studies in Mathematics, n° 24, Pitman, 1985.
- [17] **V.A. Kondrat'ev**, Boundary problems for elliptic equation in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Maths. SOS., (1967), p.227-313.
- [18] **R. Lozi**, Résultats numériques de régularité du problème de Stokes et du Laplacien itéré dans un polygone, R.A.I.R.O, Analyse Numérique, Vol. 12≠3, 1978, p 267-282.
- [19] **B. Merouani**, comportements singuliers des solutions du système de l'élasticité dans un polygone, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B., Alger (1990).
- [20] **B. Merouani**, Quelques problèmes aux limites pour le système de Lamé dans un secteur plan, C.R.A.S., t. 304, série I, no. 13, 1987.
- [21] **B. Merouani**, Solutions singulières du système de l'élasticité dans un polygone pour différentes conditions aux limites, Maghreb math, Rev, Vol 5, Nos 1 & 2, 1996, pp. 95-112

- [22] **B. Merouani and R. Boufenouche**, Trigonometric series adapted for the study of dirichlet boundary-value problems of lame systems ; electronic journal of differential equations, vol. 2015 (2015), no. 181, pp. 1-6. issn : 1072-6691.
- [23] **J. Necas**, Les méthodes directes en Théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.
- [24] **J. Osborn**. - Regularity of solutions of the Stokes problem in a polygonal domain, Symposium on Numerical Solutions of Partial Differential Equations III, B. Hubbard Editor, 1975, p. 393-411.
- [25] **J. B. Seif**, On the Green's function for the biharmonic equation in an infinite wedge, Transactions A.M.S., Vol. 182, 1973, p. 241-260.
- [26] **O. Tcha-Kondor**, Nouvelles séries trigonométriques adaptées à l'étude de problèmes aux limites pour l'équation biharmonique. Étude du cas de la fissure [New trigonometric series adapted to the study of boundary value problems for the biharmonic equation. Cas of the crack], C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 541-544, 1992(French).
- [27] **M.L.Williams**, Stress, singularities résulting from various boundary conditions in angular corner of plates in extension, J.Appl. Mch., 19,1952, p. 526-528.

ملخص: الهدف من هذه الرسالة هو المساهمة بدراسة نوعين من المسائل الحدية: واحدة يحكمها مؤثر لابلاس الثنائي في مضلع مستوي و الأخرى تتحكم فيها جملة لامي. نبين أن السلوك الشاذ للحلول يخضع لسلسلة من المعادلات السامية. تتكون هذه الأطروحة من ثلاثة فصول. في الفصل الأول نذكر بالمفاهيم الأساسية للتحليل الرياضي و التي نحتاجها خلال هذا العمل. في الفصل الثاني، طرحنا مختلف المسائل الحدية. في الفصل الثالث، نحسب الحلول الشاذة في كل حالة (بما في ذلك حالات الزاويتين π و 2π) من أجل إعداد جدول لهذه الحلول، مكملًا لجدول ب. قريزفار [5] الخاص بمسألة ديريكلي. كما نحسب معاملات الشذوذ في حالة التشقق ($\omega = 2\pi$) مع برهان تقارب هذه السلسلة. كما نعطي وصفا دقيقا للحلول الضعيفة لمسألة ديريكلي التي تتحكم فيها جملة لامي (المرونة) في ساحة مضلعة و محدودة. حيث نبين أن السلوك الشاذ للحلول يخضع لمعادلة سامية مشابهة لتلك التي في موضوع الصفائح. مع حساب معاملات الشذوذ.

كلمات المفاتيح: مؤثر لابلاس الثنائي, الحلول الشاذة, الصفائح, المعادلات مثالية, مضلع, تقويم, الشذوذية, حالة التشقق, مرونة, لامي.

Résumé. Le but de cette thèse est de proposer une contribution à l'étude de deux classes des problèmes aux limites : l'une gouvernée par le Bilaplacien dans un polygone plan et l'autre par le système de Lamé. On montre que le comportement singulier des solutions est gouverné par une série d'équations transcendentes. La thèse comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle également quelques résultats d'analyse fonctionnelle dont on aura besoin. Dans le deuxième chapitre, on pose les différents problèmes aux limites. Dans le troisième chapitre, on calcule les solutions singulières pour chaque cas (y compris les cas des angles π et 2π) dans le but de dresser un tableau, pour ces solutions, prolongeant celui de P. Grisvard [5] concernant le problème de Dirichlet. On calcule aussi les coefficients de singularité dans le cas de la fissure ($\omega = 2\pi$) avec la démonstration de la convergence de la série. On donnera une description explicite des solutions faibles du problème de Dirichlet pour le système de Lamé dans un polygone plan. On montre que le comportement singulier de la solution est gouverné par une série d'équation transcendentes analogues à celles trouvées dans le contexte des plaques. Nous calculons aussi les coefficients de singularité.

Mots-clés. Bilaplacien, Solutions singulières, Plaque, Equations transcendentes, Polygone, Singularité, Régularité, fissure, Elasticité, Lamé.

Abstract. The purpose of this thesis is the study of the two types of boundary value problems: the ones governed by the bilaplacian in a polygonal bounded domain and secondly governed by the Lamé system. We prove that the singular behavior of the solutions is governed by a series of transcendental equations. The thesis is composed of three chapters. The aim of the first chapter is to give some results of functional analysis. In the second chapter, we consider the boundary value problems. In the last chapter, we calculate the singular functions for each case (including the case of the angles π and 2π) in order to gather the main results in a table intended for the users' purpose, thus extending the results of P. Grisvard [5] for the Dirichlet problem. We also calculate the coefficients of singularities in the crack sector ($\omega = 2\pi$) and prove convergence of the series. We give an explicit description of the singularities of the weak solution to the Dirichlet problem governed by the Lamé system in a polygonal bounded domain. We prove that the singular behavior of solutions is governed by a transcendental equation similar to that found for the thin plates. We calculate the coefficients of the singularities.

Key-words. Bilaplacian, Crack sector, Singularity, Plate, Transcendental equations, Polygon, Regularity, Crack sector, Elasticity, Lamé.